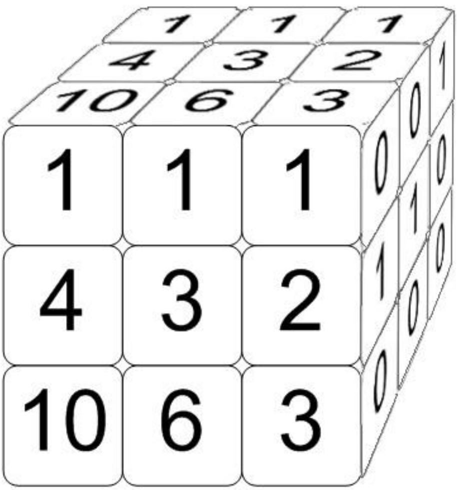
А.А. Борисенко

Введение в теорию биномиального счета



«Университетская книга»
Сумы 2004

ББК 22.174
УДК 519.854
Б 82

Рекомендовано к печати Ученым советом
Сумского государственного университета.
Протокол № 8 от 12.03.04.

Рецензенты:
д-р физ.-мат. наук, профессор Г.С. Воробьев
к. физ.-мат. наук, доцент А.И. Борискин

Борисенко А. А.
Б 82 Введение в теорию биномиального счета: Монография. – Сумы: ИТД "Университетская книга", 2004. – 76 с.

ISBN 966-680-141-8

Предлагаемая работа представляет оригинальные исследования автора в области биномиальных систем счисления и биномиального счета, обладающего рядом интересных и полезных свойств, которые могут принести практическую пользу при разработке различных алгоритмов кодирования и надежных информационных устройств.

В основу исследований положены ряды биномиальных коэффициентов и основанные на них биномиальные прямоугольники и параллелограммы, которые также представляют и чисто математический интерес.

.

ББК 22.174

ISBN 966-680-141-8

ОГЛАВЛЕНИЕ

CONTENTS

ПРЕДИСЛОВИЕ

Данное научное исследование представляет введение в относительно новый вид счета – биномиальный, основанный на биномиальных системах счисления, которыми автор занимается уже более 20 лет. Приход к ним был не простым и в какой-то мере случайным. Они появились как следствие работ автора в области теории и кодирования информации, когда была сделана попытка исследовать задачи кодирования числа в самом общем виде, что привело к разработке теории обобщенных позиционных систем счислений и более глубокому пониманию сущности и роли числа в науке [1].

Работе над этими вопросами во многом способствовали появившиеся как раз в то время фибоначчиевые системы счисления, активно разрабатываемые профессором А. П. Стаховым [2].

Биномиальные системы счисления были синтезированы с целью проверки работы предлагаемой теории позиционных систем счисления, так как для этой цели в качестве примера надо было синтезировать новую и полезную систему счисления.

В ее качестве была выбрана система счисления, основанная на биномиальных коэффициентах. Их выбор обосновывался тем, что биномиальные коэффициенты широко распространены в комбинаторике и, кроме того, используют достаточно простое рекуррентное выражение для своего вычисления.

При этом вначале были разработаны более сложные многозначные биномиальные системы счисления, и только после появились более простые двоичные, на исследование которых в дальнейшем и было направлено основное внимание [3, 4].

Совсем недавно удалось получить особые *линейно-циклические* и *матричные* биномиальные системы счисления, представляемые в данной работе впервые.

Все эти системы счисления, за исключением многозначных, в достаточной для понимания мере изложены в данной работе с целью ознакомления с ними специалистов, студентов и аспирантов, работающих в области кодирования информации и для которых представляют интерес новые идеи в области цифрового счета.

Работа начинается разделами, в которых систематически излагаются известные материалы по биному Ньютона и биномиальным коэффициентам, взятые из работ (5, 6, 7, 8).

Далее излагается новый материал по последовательностям (рядам), построенным на основе биномиальных коэффициентов, и биномиальным прямоугольникам, представляющим обобщения треугольников Паскаля, одним из важных свойств которых является возможность ускоренного вычисления биномиальных коэффициентов.

Вслед за этим идут двоичные, линейно-циклические и матричные системы счисления, основанные на биномиальных коэффициентах.

В заключительной части работы анализируются практические возможности применения биномиальных систем счисления для быстродействующего помехоустойчивого счета.

Особенность данной работы, кроме наличия в ней новых классов систем счисления, состоит в том, что в ней впервые в теории и практике систем счисления предложено представление чисел не только в линейном виде, как обычно, а и в виде матриц, что дает новые возможности по быстрому и надежному счету.

Предложенный материал представляет основу для дальнейших научных исследований и их практических применений в области быстродействующего и надежного счета, а также методов преобразования информации с целью ее сжатия и помехоустойчивого кодирования.

Следует также отметить и то, что, кроме практической цели - получения систем счисления с новыми полезными свойствами, разработка биномиальных систем счисления решает также и теоретическую задачу по более глубокому проникновению в сущность числа.

Биномиальные системы счисления, являясь наиболее сложными из известных автору систем счисления, позволяют по новому взглянуть на роль и функцию числа в науке, а также увидеть перспективу развития теории позиционных систем счисления, которая обещает еще много их интересных структур.

Часть 1 Исходные положения

1 Бином Ньютона

Бином Ньютона - это одна из наиболее известных и важных в математике формул для разложения бинома $(x-a)$ в n-й степени, где n – целое положительное число. Она может быть представлена в виде теоремы.

Теорема 1

$$\boldsymbol{(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k}}\ . \tag{1}$$

Коэффициент C_n^k, обозначаемый так же как $\binom{n}{k}$, и называемый *биномиальным коэффициентом*, в приведенной выше формуле определяет *число* различных k-элементных подмножеств, получаемых при их выборе из n-элементного исходного множества.

Доказательство. Возьмем произведение n двучленов

$$P = (x-a_1)(x-a_2)...(x-a_n)$$

и, раскрывая скобки и группируя члены с одинаковыми степенями, получим многочлен, расположенный по убывающим степеням:

$$P = x^n - x^{n-1}(a_1 + a_2 + ... + a_n) + x^{n-2}(a_1a_2 + a_1a_3 ... + a_{n-1}a_n) -$$

$$-x^{n-3}(a_1a_2a_3 + a_1a_2a_4 + ... + a_{n-2}a_{n-1}a_n) + ... + (-1)^n (a_1a_2...a_n)\ .$$

Нетрудно увидеть, что в скобках полученного выше выражения приведены всевозможные сочетания по $1, 2, ..., n$ элементам из множества $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$.

Тогда в случае $a_1 = a_2 = ... = a_n = a$

$$P = (x-a)^n = x^n - C_n^1 a x^{n-1} + C_n^2 a^2 x^{n-2} - C_n^3 a^3 x^{n-3} + ... +$$

$$+(-1)^k C_n^k a^k x^{n-k} + ... + (-1)^n a^n\ .$$

В этой формуле k-й член будет иметь вид $T_k = (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k}$.

Тогда при условии, что

$$T_0 = (-1)^0 C_n^0 a^0 x^{n-0} = C_n^0 x^n = x^n$$

и

$$T_n = (-1)^n C_n^n a^n x^{n-n} = (-1)^n C_n^n a^n x^0 = (-1)^n a^n ,$$

$$P = (x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k a^k x^{n-k} .$$

Теорема доказана.

Пример 1

$$(x-a_1)(x-a_2) = x^2 - (a_1 + a_2)x + a_1 a_2 .$$

Допустим, что $a_1 = a_2 = a$.

Тогда $(x-a)(x-a) = (x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$.

Пример 2

$$(x-a_1)(x-a_2)(x-a_3) = x^3 - (a_1 + a_2 + a_3)x^2 +$$

$$+(a_1 a_2 + a_1 a_3 + a_2 a_3)x - a_1 a_2 a_3 .$$

Если $a_1 = a_2 = a_3 = a$, то

$$(x-a)(x-a)(x-a) = (x-a)^3 = x^3 - 3ax^2 + 3a^2 x - a^3 .$$

Пример 3

$$(x+a)^3 = (x+a)(x+a)(x+a) = x^3 + 3ax^2 + 3a^2 x + a^3 .$$

Под x и a можно понимать любое число или любое алгебраическое выражение.

Пример 4

$$(3x-2a)^5 = (3x)^5 - 5 \cdot 2a(3x)^4 + 10(2a)^2 (3x)^3 - 10(2a)^3 (3x)^2 +$$

$$+5(2a)^4 3x - (2a)^5 =$$

$$= 243x^5 - 810ax^4 + 1080a^2 x^3 - 720a^3 x^2 + 240a^4 x - 32a^5 .$$

В случае если a является положительным числом, то

$$P = (x+a)^n = (x-(-a))^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} . \qquad (2)$$

Отметим некоторые очевидные свойства формул (1, 2):

1 Число членов разложения на 1 больше показателя n.

2 Показатели степени числа x убывают, а числа a возрастают от члена к члену на 1.

3 Сумма показателей x и a в каждом члене равна n.

Докажем следующие два свойства биномиальных коэффициентов на основе формулы (2).

Теорема 2

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n . \qquad (3)$$

Доказательство. Допустим, что в выражении (2) $x = a = 1$.

Тогда $$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k = 2^n .$$

Теорема доказана.

Теорема 3 ***Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, и каждая из них равна 2^{n-1}.***

Доказательство Допустим, что в выражении (2) $x = 1$ и $a = 1$. Тогда

$$(x+a)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} = (1-1)^n = (0)^n = 0 .$$

Слагаемые $C_n^k a^k x^{n-k}$ в приведенном выше выражении принимают в случае, если k четное, положительные значения, равные $C_n^{k'}$, а в случае, если k нечетное - отрицательные -(- $C_n^{k''}$), где $k' = 0,2,4,...$; $k'' = 1,3,5,...$, k' - значение верхнего параметра коэффициентов, стоящих на четных местах, а k'' - значение верхнего параметра коэффициентов, стоящих на нечетных местах.

Поэтому

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k x^{n-k} = \sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} - \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 0 ,$$

где n' - максимальное значение k';

n'' - максимальное значение k''.

Из полученного равенства следует, что

$$\sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} = \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} .$$

Так как из вышеприведенного равенства следует, что указанные суммы равны между собой, а из теоремы 2 при $x = a = 1$ вытекает равенство

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^{k} = \sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} + \sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 2^n ,$$

то каждая из сумм должна равняться $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$:

$$\sum_{k'=0}^{n'} C_n^{k'} = 2^{n-1} ,$$

$$\sum_{k''=0}^{n''} C_n^{k''} = 2^{n-1} .$$

Теорема доказана.

2 Биномиальные коэффициенты

Пусть имеется множество, состоящее из n элементов. Каждое его подмножество из k элементов называется *сочетанием* k элементов из n, где n, k – целые положительные числа $0,1,...,n \geq k$. Число всех возможных сочетаний k элементов из n C_n^k представляет собой *биномиальный коэффициент*.

Так если элементами исходного множества будут буквы *a*, *b*, *c*, *d*, *e*, то из них можно получить следующие сочетания: *abc*, *abd*, *abe*, *acd*, *ace*, *ade*, *bcd*, *bce*, *bde*, *cde*, число которых $C_5^3 = 10$.

Различные сочетания отличаются друг от друга только составом входящих в них элементов, а порядок их расположения в сочетаниях не играет роли. Например, последовательности *abc*, *acb*, *bac*, *bca*, *cab*, *cba* представляют одно сочетание, состоящее из 3 элементов *a*, *b*, *c*, порядок которых в нем не важен.

Если же порядок в сочетании имеет значение, то такое сочетание будет называться *размещением* k элементов из n.

Теорема 4 ***Число размещений для k элементов из n,*** $n \geq k$,

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1). \qquad (4)$$

Доказательство. Первый элемент размещения из n, очевидно, можно выбрать n способами, второй $n-1$ и т.д. до k–го элемента, который может быть выбран $n-k+1$ способами, так как к моменту выбора k–го элемента осталось $n-(k-1)=n-k+1$ элементов. В результате число способов, которыми можно выбрать k элементов из n –элементного множества, а значит, и число размещений

$$A_n^k = n(n-1)...(n-k+1).$$

Теорема доказана.

Размещение, для которого $k = n$, называется *перестановкой*

$$P_k = P_n = A_n^n = n! = n(n-1)...1. \qquad (5)$$

Теорема 5

$$A_n^k = P_k C_n^k = k! C_n^k. \qquad (6)$$

Доказательство. Каждому сочетанию k элементов из n соответствует $P_k = k!$ перестановок, а все возможные перестановки для всех сочетаний образуют все размещения k элементов из n. Поэтому

$$A_n^k = P_k C_n^k = k! C_n^k.$$

Теорема доказана.

Теорема 6 ***Число сочетаний для k элементов из n***

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}. \qquad (7)$$

Доказательство. Из теоремы 5 следует, что

$$C_n^k = \frac{A_n^k}{P_k} = \frac{A_n^k}{k!},$$

а из теоремы 1, что $A_n^k = n(n-1)...(n-k+1)$.
Поэтому

$$C_n^k = \frac{n(n-1)...(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Теорема доказана.

Принято, что 0!=1, поэтому

$$C_n^0 = \frac{n!}{n!\cdot 0!} = \frac{n!}{n!\cdot 1} = 1;$$

$$C_0^0 = \frac{0!}{0!0!} = \frac{1}{1\cdot 1} = 1.$$

Пример 5 Сколько шестизначных чисел, кратных пяти, можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 6 при условии, что в числе цифры не повторяются?

Решение. Для того чтобы число, составленное из заданных цифр, делилось на 5, необходимо и достаточно, чтобы цифра 5 стояла на последнем месте. Остальные 5 цифр могут стоять на оставшихся местах в любом порядке.

Следовательно, искомое число шестизначных чисел, кратных 5, равно числу перестановок из 5 элементов, т.е.

$$P_5 = 5! = 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 = 120.$$

Пример 6 Студенты изучают 14 предметов. Сколькими способами можно составить расписание занятий на субботу, если в этот день недели должно быть 5 различных уроков?

Решение. Различных способов составления расписания, очевидно, столько, сколько существует пятиэлементных упорядоченных подмножеств множества из 14 четырнадцати элементов.

Следовательно, число способов равно числу размещений из 14 элементов по 5:

$$A_{14}^5 = 14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10 = 240240.$$

Пример 7 Сколько экзаменационных комиссий, состоящих из 7 членов, можно образовать из 15 преподавателей?

Решение. Очевидно, столько, сколько существует сочетаний из 14 преподавателей по 7:

$$C_{14}^7 = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = 3432.$$

Свойства биномиальных коэффициентов

Теорема 7

$$\boldsymbol{C_n^k = C_n^{n-k}}. \qquad (8)$$

Доказательство. Подставив $n-k$ вместо k в формулу 7, получим

$$C_n^{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!(n-(n-k))!} = \frac{n!}{(n-k)!k!} = C_n^k.$$

***Теорема доказана*.**

Данное свойство известно как *свойство симметрии*. Его смысл заключается в том, что не имеет значения как выбирать элементы: из числа n по k или из n по $n-k$.

В том и другом случае число подмножеств будет одинаково.

Теорема 8

$$\boldsymbol{C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k}. \qquad (9)$$

Доказательство $\quad C_n^{k+1} + C_n^k =$

$$= \frac{n!}{(n-k-1)(k+1)!} + \frac{n!}{(n-k)!k!} = \frac{n!}{(n-k)!(k+1)!}\left(\frac{n-k}{1} + \frac{k+1}{1}\right) =$$

$$= \frac{(n+1)!}{(n+1-(k+1)!(k+1)!)} = C_{n+1}^{k+1}.$$

***Теорема доказана*.**

Доказательство данной теоремы также можно получить и исходя из следующих соображений.

Число C_{n+1}^{k+1} определяет число тех подмножеств из $k+1$ элементов, которые могут быть выбраны из множества, содержащего $n+1$ элементов.

Выберем один из этих элементов, например, x, и разобьем исходное множество из C_{n+1}^{k+1} подмножеств на два класса, один из которых содержит в своих подмножествах элемент x, а второй нет.

Так как элемент x в последнем втором классе отсутствует, то входящие в него подмножества не содержат этого элемента и соответственно выбор элементов, число которых остается, как и ранее, равным $k+1$, происходит не с $n+1$ элементов, а с n. Поэтому число подмножеств во втором классе равно C_n^{k+1}.

В первом классе элемент x присутствует во всех без исключения подмножествах. Это значит, что он просто присоединяется к элементам, число которых теперь будет равно k и которые выбираются не из $n+1$ элементов, как было до разбиения, а из n (элемент x при их выборе отсутствует). Поэтому число подмножеств в первом классе равно C_n^k. Соответственно сумма подмножеств первого и второго классов $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$, что и доказывает исходное утверждение.

Следствие 1 $$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (10)$$

Теорема 8 известна как *Правило Паскаля*. Это наиболее широко применяемое в комбинаторике свойство, позволяющее выразить по правилам рекурсии один биномиальный коэффициент через два других. Теорема 8 является основой построения треугольников Паскаля, как числового (рис. 1а), так и символического (рис. 1б).

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 & & & & & 1 & & & & & & \quad n=0 \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & & \quad n=1 \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & \quad n=2 \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & \quad n=3 \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & \quad n=4 \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & \quad n=5
\end{array}$$

Рисунок 1а – Числовой треугольник Паскаля

$$\begin{array}{cccccccccccl}
 & & & & & C_0^0 & & & & & & \quad n=0 \\
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & & \quad n=1 \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & & \quad n=2 \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & & \quad n=3 \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & & \quad n=4 \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 & \quad n=5
\end{array}$$

Рисунок 1б – Символический треугольник Паскаля

В n-й, $n = 0,1,\ldots$, строке треугольника Паскаля стоят коэффициенты разложения выражения $(a+b)^n$, причем каждый коэффициент, кроме двух крайних, которые равны 1, равен сумме стоящих над ним ближайших двух коэффициентов из предшествующей строки (см. рис 1a и 1b).

Числовой треугольник Паскаля при неограниченном его продолжении позволяет находить биномиальные коэффициенты с любыми n и k, что может значительно упростить процедуру их вычисления. Для нахождения значения какого-либо коэффициента C_n^k необходимо найти в треугольнике Паскаля соответствующий n номер ряда и в этом ряду номер биномиального коэффициента, соответствующий числу k.

Нумерация при этом как отдельных рядов, так и внутри каждого ряда биномиальных коэффициентов начинается с 0 и происходит сверху вниз при нумерации рядов и слева направо при нумерации биномиальных коэффициентов внутри каждого ряда.

Так как каждый ряд биномиальных коэффициентов представляет все коэффициенты биномиального разложения $(a+b)^n$, то их сумма равняется 2^n.

Кроме того, сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах, равна их сумме на четных местах. В свою очередь, каждая из этих сумм равна 2^{n-1}.

Числовой треугольник в соответствии со свойством симметрии биномиальных коэффициентов строго симметричный по отношению к его срединной линии, состоящей из биномиальных коэффициентов, стоящих на четных рядах. Поэтому при использовании его для вычисления биномиальных коэффициентов достаточно построить какую-либо одну его половину.

На практике для вычисления C_n^k иногда более удобно пользоваться треугольником Паскаля, представленном в табличной форме (см. таблицу 1).

Здесь, как и ранее, все коэффициенты биномиального разложения расположены в одном ряду и в сумме образуют величину 2^n.

В то же время правило Паскаля реализуется путем суммирования двух рядом стоящих в одной строке биномиальных коэффициентов. Результирующий коэффициент при этом находится в соседней нижней строке правого столбца (см. табл. 1).

Таблица 1- Треугольник Паскаля в табличной форме

N	Биномиальные коэффициенты											
0	C_0^0						1					
1	C_1^0	C_1^1					1	1				
2	C_2^0	C_2^1	C_2^2				1	2	1			
3	C_3^0	C_3^1	C_3^2	C_3^3			1	3	3	1		
4	C_4^0	C_4^1	C_4^2	C_4^3	C_4^4		1	4	6	4	1	
5	C_5^0	C_5^1	C_5^2	C_5^3	C_5^4	C_5^5	1	5	10	10	5	1

Например,

$$\begin{array}{|cc|} \hline C_3^1 & C_3^2 \\ \hline & C_4^2 \\ \hline \end{array} .$$

Это значит, что $C_4^2 = C_3^2 + C_3^1$ (правило Паскаля).

Теорема 9

$$\boldsymbol{C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1} = \sum_{i=0}^{n-k} C_{k+i-1}^{k-1}} . \qquad (11)$$

Доказательство. На основе правила Паскаля запишем следующие равенства:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1},\ C_{n-1}^k = C_{n-2}^k + C_{n-2}^{k-1},\ \ldots,\ C_{k+2}^k = C_{k+1}^k + C_{k+1}^{k-1},$$

$$C_{k+1}^k = C_k^k + C_k^{k-1}.$$

Подставив выражение для C_{k+1}^k в выражение для C_{k+2}^k, получим, что

$$C_{k+2}^{k} = C_k^k + C_k^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} = C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1},$$

так как $C_k^k = C_{k-1}^{k-1} = 1$.

Подставив коэффициенты для C_{k+2}^{k} в предшествующее ему равенство $C_{k+3}^{k} = C_{k+2}^{k} + C_{k+2}^{k-1}$, получим, что

$$C_{k+3}^{k} = C_{k+2}^{k-1} + C_{k+1}^{k-1} + C_k^{k-1} + C_{k-1}^{k-1}.$$

Затем такую же операцию проведем для остальных коэффициентов вплоть до C_{n-1}^{k} и в результате получим (11).

***Теорема доказана*.**

Равенство (11) реализуется в треугольнике Паскаля путем арифметических операций над соседними коэффициентами любой строки, расположенной параллельно левой стороне треугольника. В этом случае коэффициент C_n^k находится в соседней нижней строке и определяется как сумма стоящего над ним и всех соседних справа коэффициентов верхней строки (см. рис. 1а, б).

Так, например, коэффициент C_3^2 на рис. 1б образуется коэффициентами C_2^1 и C_1^1 верхней строки. При этом коэффициент C_2^1 стоит над ним вверху, а коэффициент C_1^1 - справа от коэффициента C_2^1.

Соответственно коэффициент 3 в нижней строке рис. 1а равен сумме двух коэффициентов - коэффициента 2 в верхней строке и соседнего к нему справа коэффициента 1 в этой же строке.

Реализация равенства (11) в табличной форме треугольника Паскаля происходит суммированием всех биномиальных коэффициентов, стоящих в одном и том же столбце, до коэффициента C_n^{k-1} включительно. Искомый коэффициент C_n^k находится в соседнем столбце в строке, где расположен коэффициент C_n^{k-1} (см. табл.1).

Теорема 10

$$\boldsymbol{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k+1}^2 + C_{n-k}^1 + C_{n-k-1}^0 = \sum_{i=0}^{k} C_{n-k+i-1}^i}. \quad (12)$$

Доказательство. Так как $C_{n-k}^{0}=1$, то в соответствии с равенством $C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}$ имеем, что $C_{n-k}^1 + C_{n-k}^0 = C_{n-k+1}^1$ и соответственно $C_{n-k+1}^2 + C_{n-k+1}^1 = C_{n-k+2}^2$ и т.д. до получения в конечном итоге равенства (12).

Теорема доказана.

Коэффициент C_n^k в соответствии с (12) можно найти также и с помощью треугольника Паскаля. Для этого берется строка, параллельная правой стороне треугольника, и с её помощью находится разложение коэффициентов C_n^k по n и k (см. рис. 2).

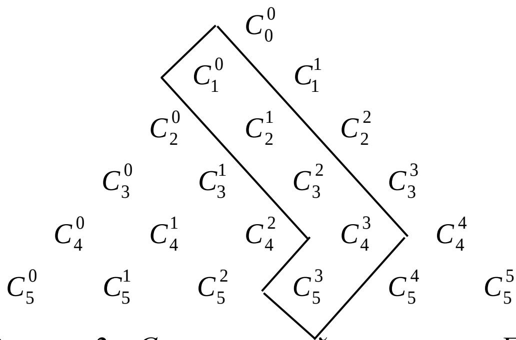
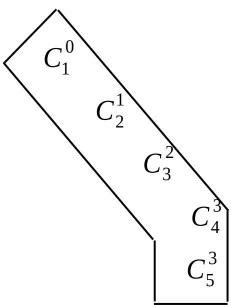
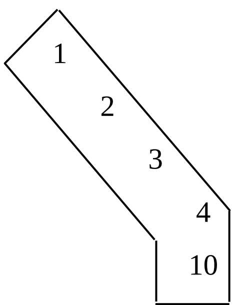


Рисунок 2 – Символический треугольник Паскаля с представлением коэффициентов C_n^k суммой коэффициентов верхней строки

Выражение (12) можно получить и с помощью треугольника Паскаля в табличной форме. Для этого выделяется строка, параллельная гипотенузе, полученного в табл.1 прямоугольного треугольника. Сумма всех коэффициентов в любой начальной части этой строки равна коэффициенту параллельной ей соседней строки, стоящему под последним коэффициентом этой части.Например,





.

Из (12) следует, что $C_5^3 = C_4^3 + C_3^2 + C_2^1 + C_1^0$.

Теорема 11. ***При k ≠ 0***

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}}. \tag{13}$$

Доказательство $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} \cdot \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$.

Так как отношение $\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = C_{n-1}^{k-1}$, то $C_n^k = \frac{n}{k} C_{n-1}^{k-1}$.

Теорема доказана.

Следствие 1

$$k\,C_n^k = n\,C_{n-1}^{k-1}. \tag{14}$$

Следствие 2 *При k ≠ 0, n ≠ 0*

$$\frac{1}{n} C_n^k = \frac{1}{k} C_{n-1}^{k-1}. \tag{15}$$

Теорема 12. ***При n ≠ k***

$$\boldsymbol{C_n^k = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{k}}. \tag{16}$$

Доказательство. В соответствии с теоремой 11

$$C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{n-k-1}.$$

Вследствие теоремы 7, по которой

$$C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^{k},$$

$$C_n^{n-k} = \frac{n}{n-k} C_{n-1}^{k}.$$

Теорема доказана.

Следствие 1

$$(n-k)C_n^k = nC_{n-1}^k. \qquad (17)$$

3. О некоторых обобщенных классификационных признаках позиционных систем счисления

Развитие математики неразрывно связано с системами счисления, которые в своем развитии прошли сложный путь от простейших непозиционных систем через пальцевой счет и числа совокупности до современных позиционных систем счисления.

Число по своей природе двойственно. С одной стороны, оно определяет количество, а с другой - порядок расположения элементов во множествах. Количество является абстракцией от свойств множества и представляется числом содержащихся в нем элементов. На этой идее основан подход Кантора к определению числа. Оно представляет то общее, что имеют равномощные множества независимо от их природы. Порядковые свойства чисел исследует теория порядковых чисел, основанная на аксиомах Пеано. Они обосновывают возможность порядкового счета элементов с помощью чисел [9].

К системам счисления предъявляется ряд требований, среди которых наиболее важными являются требования однозначности, конечности, эффективности, возможности сравнения чисел между собой по величине и выполнения над числами арифметических и логических действий. От удачного или неудачного выбора системы счисления зависит эффективность ее применения для практических нужд математики.

Исторически первыми возникли непозиционные системы счисления. В их основе лежит количественный подход к определению числа. Для определенных количеств придумывались особые знаки-числа, которыми в дальнейшем пользовались для получения других чисел.

Когда количество используемых чисел ограничивалось несколькими десятками, то такое кодирование устраивало практику, но с ростом количества применяемых на практике чисел появилась потребность в более сложных системах счисления, позволяющих решать задачи кодирования любых чисел и выполнять над ними арифметические и логические операции.

Позиционные системы счисления появились в Европе относительно недавно, в 13-м веке. Их принесли из Индии арабские завоеватели. История их создания теряется в прошлом и на сегодня имеется немного достоверных сведений о них.

Уверенно можно утверждать лишь то, что позиционные системы счисления произвели революцию в мышлении и практической деятельности человека. Их создавало практически все человечество в течение тысячелетий.

В основе позиционных систем счисления лежит структурный подход к понятию числа, который до конца на сегодня не является окончательно осознанным.

Первыми позиционными системами счисления, получившими распространение на практике, были пятеричная и десятичная системы счисления. После появились двоичная, восьмеричная, двенадцатеричная и другие системы счисления, основанные на числах натурального ряда. Такие системы счисления называются *однородными*, а также *естественными* (или *степенными*). Их характерной особенностью является равенство чисел по длине.

Разработка более сложных *неоднородных* позиционных систем счисления началась во второй половине 20-го века после появления цифровой техники. Они использовались в основном при построении специализированных вычислителей, систем связи и управления, кодирующих и декодирующих устройств с целью получения их более высокой эффективности.

При этом возникла задача исследования общих принципов позиционного счета, чтобы на этой основе произвести классификацию позиционных систем счисления, получить и исследовать новые классы и разработать новые методы их построения.

Каждая позиционная система счисления характеризуется древовидной структурой, которая создается в процессе последовательных разбиений некоторого конечного множества чисел $Q=\{q_1,\ q_2,\ldots,q_P\}$ по шагам $j=1,\ldots,n$ на подмножества в общем случае с разным количеством элементов до получения в каждом из них *одного* числа.

Признаки $r=0,\ 1,\ldots,k$ подмножеств, получаемых в том или ином разбиении, называются *цифрами*.

Наибольшее множество цифр среди всех возможных разбиений называется алфавитом системы счисления $A=\left(0,\ 1,\ldots,k_{\max}\right)$, где $k_{\max}$ - наибольшая цифра разбиения с наибольшим количеством подмножеств, задаваемых на том или ином дереве разбиений.

Последовательность цифр $X=x_1,x_2,\ldots,x_j,\ldots,x_n;\ x_j\in A$, получаемая в процессе пошаговых разбиений, однозначным образом кодирует одно из чисел множества Q. В результате с помощью этой последовательности будет получена полная информация о кодируемом числе.

Число, функция или какое-либо условие, по которому происходят разбиения в системе счисления, называется ее *основанием*.

Число n последовательных разбиений исходного множества Q до получения подмножества, состоящего из *одного* элемента, называется разрядностью числа, а номер $i = n - j$ - его разрядом.

Представленную выше последовательность цифр

$$X = x_1,\ x_2, \ldots x_n\ ,$$

получаемых по всем разбиениям, можно с помощью равенства $i = n - j$ представить в виде последовательности цифр

$$X = x_{n-1} x_{n-2} \ldots x_i \ldots x_0;\ x_i \in A,$$

которая называется *числом*.

Количество чисел P в разбиваемом их множестве Q называется *диапазоном* представимых в данной позиционной системе счисления чисел.

Количество чисел в подмножестве, получаемом в том или ином разбиении, называется *весом* соответствующей данному разбиению цифре.

Количество цифр n в числе называется его *длиной* или *разрядностью*.

Равную длину числа имеют только тогда, когда подмножества, получаемые на каждом шаге разбиений, содержат одинаковое число чисел. Это условие имеет место для однородных систем счисления: десятичной, двоичной, восьмеричной и других.

Системы счисления с равной длиной чисел относятся к классу равномерных кодов.

Однако в общем случае, когда получаемые в процессе разбиений подмножества содержат разное количество чисел, длины чисел будут различными. Причем ни одно число в этом случае не может быть началом или префиксом другого. Это следует из того, что последняя цифра каждого числа кодирует подмножество, содержащее *одно* число, и соответственно дальнейшее разбиение этих подмножеств невозможно. А раз это так, то продолжение числа отсутствует и, значит, оно не может быть началом никакого другого числа.

В этом применительно к системам счисления суть *принципа унарности* (*унитарности*), по которому полная информация об числе будет передана только тогда, когда в процессе разбиений будет получено *одно* и только *одно* число [10].

Системы счисления с различной длиной чисел относятся к неравномерным или префиксным кодам и являются неоднородными.

В неоднородных системах счисления с неравномерным кодированием веса цифр чисел зависят как от номера i разряда, так и от значений предшествующих цифр в числе. В результате число подмножеств, получаемых в пределах одного шага разбиений, в общем случае будет различным. В этом случае кодирование чисел будет неравномерным (префиксным).

Неоднородные системы счисления с неравномерным кодированием будем называть *структурными*.

Их характерным признаком будет разная длина принадлежащих им чисел. Примером структурных систем счисления являются рассматриваемые ниже в данной книге биномиальные.

Более простым ограничением для неоднородных систем счисления будет требование постоянства числа подмножеств в пределах одного шага разбиений. При этом устанавливается функциональная связь между номером шага разбиений и числом подмножеств в разбиениях на этом шаге.

Веса цифр, принадлежащих к одному разряду числа, в этом случае равны между собой.

Числа для неоднородных систем счисления с такими ограничениями имеют, как и для однородных, равную длину.

Примером таких систем счисления являются факториальные, а в более общем случае – системы счисления со смешанным основанием или полиадические.

Системы счисления, в качестве оснований которых выбраны комбинаторные соотношения, будем называть *комбинаторными*.

Примером комбинаторных систем счисления будут упоминавшиеся ранее факториальные системы счисления, основанные на факториале, и структурные биномиальные, использующие в своей основе биномиальные коэффициенты.

Наиболее сложными ограничениями на количество подмножеств в разбиениях являются числа, полученные в процессе случайных разбиений, для которых отсутствуют правила их построения. Числа в таких системах счисления будут являться неравномерными и соответственно структурными.

Назовем такие системы счисления *табличными*, так как задать их можно только с помощью таблиц. Это наиболее сложные системы счисления.

На рис. 3 в виде блок-схемы приведена классификация систем счисления.

Таким образом, позиционные системы счисления подразделяются на два больших класса - *однородные* с равной длиной чисел и *неоднородные* с равной и неравной длиной чисел. Однородные, веса которых являются степенными функциями, в свою очередь, подразделяются на двоичные, троичные, десятичные и т.д., а неоднородные - на *полиадические* с равной длиной и *структурные* с неравной длиной чисел, которые, в свою очередь, делятся на *комбинаторные* и *табличные*.

Все позиционные системы счисления без исключений могут быть представлены в виде деревьев разбиений, вершины которых отображают количества чисел в разбиваемых подмножествах, а ветви представляют цифры, кодирующие подмножества, получаемые после разбиения. При этом последовательности цифр образуют (кодируют) числа позиционных систем счисления.

Рассмотрим более подробно структуры различных систем счисления, представленных на рис. 4, 5, 6, среди которых наиболее простой является двоичная система.

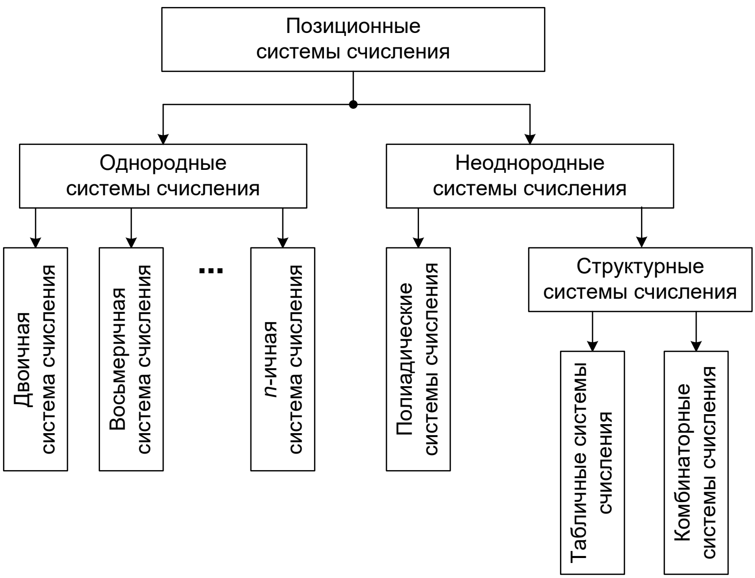


Рисунок 3 – Классификация систем счисления

На рис. 4 представлена двоичная система счисления с диапазоном $P = 8$.

Диапазон двоичной системы счисления образуется степенной функцией $P = 2^n$, разбиение на каждом шаге в которой происходит ровно на $k = 2$ класса чисел, кодирующиеся цифрами $0, 1$. Все двоичные числа при этом имеют одинаковую длину, а порождающий их алфавит A содержит две цифры 0 и 1.

Числовая функция, задающая количественный эквивалент двоичного числа, имеет вид

$$F_{\langle 2\rangle} = x_{n-1}2^{n-1} + x_{n-2}2^{n-2} + \ldots + x_0 2^0 . \qquad (18)$$

Обратим внимание на то, что такое же дерево разбиений могут иметь и другие коды, например, код Грея. Однако любое другое кодирование классов эквивалентности, отличное от приведенного класса на рис. 4, это уже более сложное кодирование, представляющее множество слов, а не чисел. Для чисел требуется только кодирование разбиений цифрами в указанном на рис. 4 порядке. В этом отличие обычных кодов от систем счисления, то есть не всякий код является системой счисления, хотя в основе любого кода лежит система счисления.

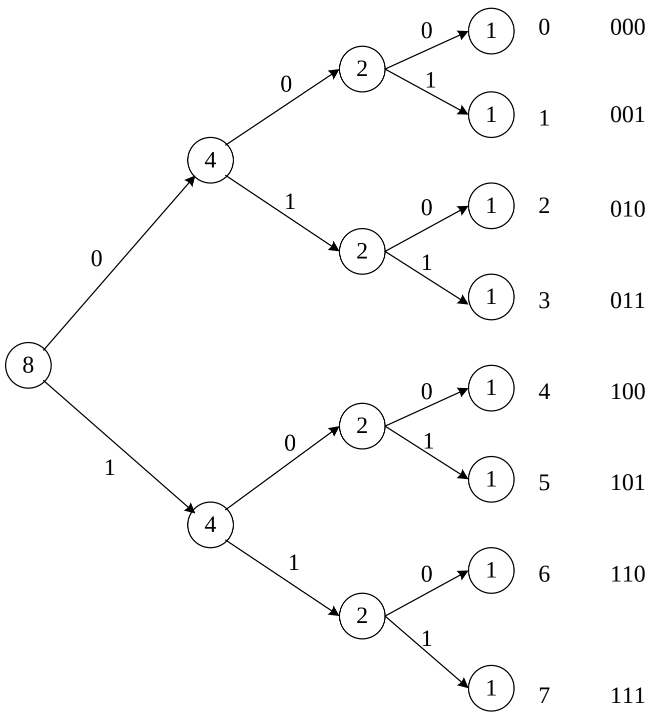


Рисунок 4 – Дерево разбиений двоичной системы счисления

Это принципиальное положение, позволившее автору создать теорию структурных систем счисления и, как следствие, получить рассматриваемые в данной монографии биномиальные системы счисления.

Система счисления это – запись математической структуры, на базе которой можно получить неограниченное число различных кодов, комбинации которых являются словами, а не числами.

На этом положении основаны предлагаемые автором в данной и других работах методы нумерации и построения комбинаторных объектов.

Двоичная система счисления является представительницей однородных (естественных, степенных) систем счисления.

Широко используемым на практике примером системы счисления со смешанным основанием является факториальная система счисления

$$F = x_n n\,! + x_{n-1}(n-1)! + \ldots + x_1 1! + x_0 0!\,, \qquad (19)$$

$$0 \le x_i \le i,\ i = 0,\ 1, \ldots, n\,;$$

$$P = n!$$

Структура с $n = 3$ разбиениями факториальной системы счисления для диапазона $P = n! = 3! = 6$ чисел приведена на рис. 5.

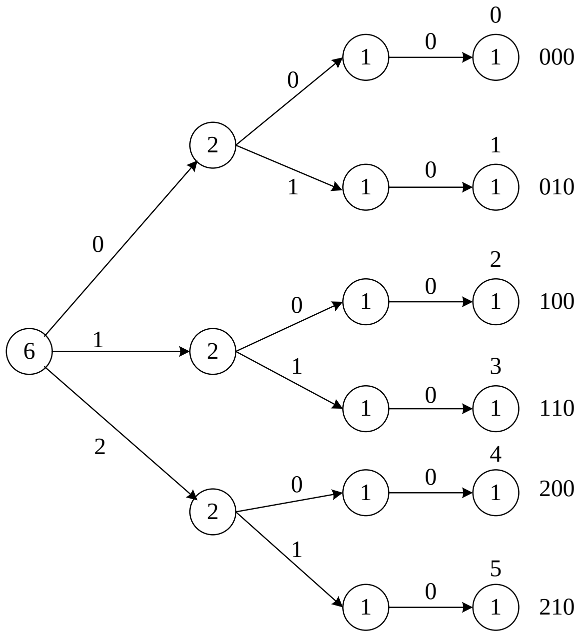


Рисунок 5 – Дерево разбиений факториальной системы счисления

Информационными разрядами у этой системы счисления являются только первый и второй, а нулевой разряд является избыточным.

Числовая функция для данной системы счисления имеет вид

$$F = x_2 2! + x_1 1! + x_0 0!,$$

$$0 \le x_i \le i,\ i = 0,\ 1,\ 2\ .$$

Ценной особенностью факториальных систем счисления является то, что они способны генерировать перестановки. Эта особенность объясняется тем, что структурой множества перестановок является факториальная система счисления. Кроме перестановок, данная система счисления может генерировать и другие комбинаторные объекты, так или иначе связанные с перестановками, в чем собственно и заключается ее потенциальная полезность.

На рис. 6 представлена двоичная структурная система счисления с неравной длиной чисел.

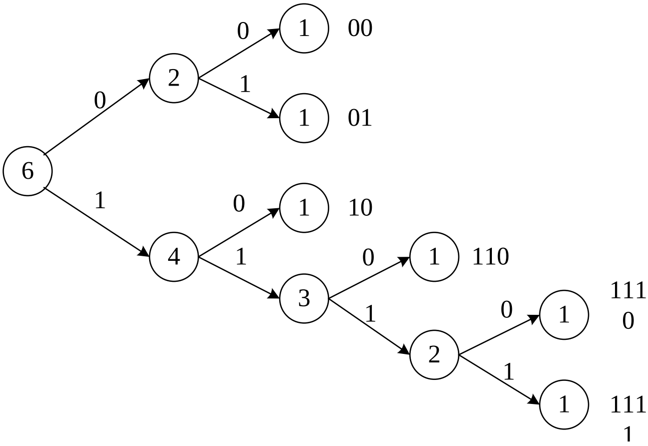


Рисунок 6 – Структурная система счисления с неравной длиной чисел

Множество чисел этой системы счисления представляет собой префиксный код, потому что ни одно из приведенных на рис. 6 чисел не является началом другого. Так как для этой системы счисления не просматривается никакого правила построения, то ее следует отнести к табличной.

Часть 2 Биномиальные вычисления

4. Последовательности биномиальных коэффициентов

На практике при решении различных задач комбинаторики часто приходится искать значения биномиальных коэффициентов C_n^k. Наиболее просто это сделать путем их вычисления по явной формуле для биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)1}. \qquad (20)$$

Однако в этой формуле содержатся операции умножения и деления, что затрудняет проведение вычислений при больших значениях k и n (1000 и больше).

В данной работе предпринята попытка на основе введенных автором специальных *последовательностей (рядов)* биномиальных коэффициентов (БК) облегчить эти вычисления, исключив операции умножения и деления и оставив только операции сложения. Особенно такой подход полезен при построении специализированных программно-аппаратных комплексов, где уменьшение разнообразия выполняемых операций всегда снижает аппаратурные издержки и в конечном итоге поднимает их быстродействие и надежность.

Идея построения предлагаемых последовательностей заложена еще в треугольнике Паскаля в соответствующей формуле

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}. \qquad (21)$$

В основу данного метода построения последовательностей положены полученные на ее основе два способа рекуррентного разложения биномиальных коэффициентов:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k-1}^0; \qquad (22)$$

и

$$C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{k-1}^{k-1}. \qquad (23)$$

Определение 1. Последовательности элементов, полученные на основе рекуррентного разложения БК, назовем *символическими* последовательностями БК. При наличии в них вместо биномиальных коэффициентов их числовых значений – *числовыми* последовательностями БК.

При вычислении биномиальных коэффициентов C_n^k, как правило, создается не одна, а несколько последовательностей БК, каждая из которых формируется на основе предшествующей.

Начальная (нулевая) последовательность при этом состоит из $k+1$ единиц: $\overbrace{11...1}^{k+1}$.

Элементы следующей первой последовательности получаются в процессе суммирования единиц нулевой последовательности, начиная с самой левой и до номера искомого элемента включительно. В результате первая последовательность будет содержать элементы $1, 2, ..., k+1$. Аналогично будет получена вторая, третья и т.д. последовательности.

Например, для параметра $k=4$ могут быть получены следующие последовательности: 1 1 1 1 1, 1 2 3 4 5, 1 3 6 10 15, 1 4 10 20 35, 1 5 15 35 70, 1 6 21 56 126, … .

Полученные в примере последовательности являются числовыми. Их легко представить в символьном виде с помощью биномиальных коэффициентов C_{i+j}^j, где $j=0,1,...,k$ задает номер биномиального коэффициента в формируемой последовательности, а $i=0,1,...,n-k$ - номер последовательности.

Следовательно, начальная (нулевая) последовательность имеет номер $i=0$ и представляется, как $C_0^0, C_1^1, ..., C_k^k$. За ней следуют

$$
\begin{aligned}
&C_1^0 \;\; (C_1^0 + C_1^1 = C_2^1) \ldots (C_k^{k-1} + C_k^k = C_{k+1}^k)\,,\\
&C_2^0 \;\; (C_2^0 + C_2^1 = C_3^1) \ldots (C_{k+1}^{k-1} + C_{k+1}^k = C_{k+2}^k)\,,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&C_{n-k}^0 \;\; (C_{n-k}^0 + C_{n-k}^1 = C_{n-k+1}^1) \ldots (C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k = C_n^k)\,.
\end{aligned}
$$

Полученные символические последовательности представим в более простой форме

$$C_0^0\, C_1^1 ... C_k^k,\; C_1^0\, C_2^1 ... C_{k+1}^k,\; C_2^0\, C_3^1 ... C_{k+2}^k,\; \ldots,\; C_{n-k}^0\, C_{n-k+1}^1 ... C_n^k .$$

В общем виде i-я последовательность будет иметь следующий вид:

$$C_i^0\, C_{i+1}^1 ... C_{i+j}^j ... C_{i+k}^k,\;\; j=0,1,...,k;\; i=0,1,...,n-k .$$

При $i=n-k$ и $j=k$ коэффициент

$$C_{i+j}^j = C_n^k, \tag{24}$$

то есть k-й элемент $(n-k)$-й числовой последовательности представляет собой искомый биномиальный коэффициент C_n^k.

Выражение (24) по существу выражает предлагаемый метод вычисления биномиальных коэффициентов с помощью последовательности БК.

Его реализация состоит в следующих шагах:

1. По имеющимся значениям параметров k и n определяется номер $i=n-k$ последовательности БК, в которой расположен искомый биномиальный коэффициент C_n^k.

2. Строятся числовые последовательности БК, состоящие из $(k+1)$ элементов, начиная с нулевой и до последовательности с номером $i=n-k$ включительно. Всего последовательностей будет $n-k+1$.

3. Последний k-й элемент $(n-k)$-й числовой последовательности БК будет представлять значение биномиального коэффициента C_n^k.

Пример 8 Дано $k=2$, $n=4$. Требуется найти значение соответствующего биномиального коэффициента C_4^2.

Решение. Так как для рассматриваемого случая $j=k=2$, то $i=n-k=2$.

Соответственно строим три последовательности с $i=0,1,2$ и тремя элементами с $j=0,1,2$, начиная с последовательности, состоящей из трех единиц:

$$\underset{k+1}{\overset{i=0}{\begin{matrix}1&1&1\\0&1&2\end{matrix}}},\ \underset{k+1}{\overset{i=1}{\begin{matrix}1&2&3\\0&1&2\end{matrix}}},\ \underset{k+1}{\overset{i=2}{\begin{matrix}1&3&6\\0&1&2\end{matrix}}}.$$

Так как последний элемент второй строки равен 6, то окончательный ответ $C_4^2=6$.

Проверка:

$$C_4^2=\frac{4!}{2!2!}=6.$$

Пример 9 Дано $k=4$, $n=10$. Требуется найти значение биномиального коэффициента C_{10}^4.

Решение. Определяем величину $i=n-j$. Так как значение $j=k=4$, то $i=10-4=6$.

Поэтому нужно строить $n-k+1=7$ последовательностей, состоящих из $k+1=5$ биномиальных коэффициентов: $1\ 1\ 1\ 1\ 1$, $1\ 2\ 3\ 4\ 5$, $1\ 3\ 6\ 10\ 15$, $1\ 4\ 10\ 20\ 35$, $1\ 5\ 15\ 35\ 70$, $1\ 6\ 21\ 56\ 126$, $1\ 7\ 28\ 84\ 210$.

Так как последний элемент последовательности с номером $i=6$ равен 210, то $C_{10}^{4}=210$.

Проверка:

$$C_{10}^{4}=\frac{10!}{4!6!}=210.$$

Пример 10 Дано $k=6$, $n=10$. Найти значение биномиального коэффициента C_{10}^{6}.

Решение. Определяем $i=n-k$. Так как $k=6$, то $i=10-6=4$. Поэтому строится 4+1=5 последовательностей, состоящих из 7 биномиальных коэффициентов:

$$1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1\ 1,\ 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7,\ 1\ 3\ 6\ 10\ 15\ 21\ 28,$$

$$1\ 4\ 10\ 20\ 35\ 56\ 84,\ 1\ 5\ 15\ 35\ 70\ 126\ 210.$$

Так как последний элемент пятой последовательности равен 210, то $C_{10}^{6}=210$, что совпадет с результатом, полученным в предыдущем примере, так как

$$C_{10}^{6}=C_{10}^{4}=210.$$

Определим быстродействие рассматриваемого метода, подсчитав общее количество операций суммирования при вычислении биномиальных коэффициентов.

Количество операций суммирования в каждой последовательности БК, очевидно, равно k, и так как их общее число без начальной последовательности равно $n-k$, то суммарное число операций сложения

$$N=(n-k)k=nk-k^{2}. \qquad (25)$$

Функция (25) является полиномиальной, что позволяет с помощью ЭВМ решать задачи вычисления биномиальных коэффициентов для сравнительно больших величин n и k.

Например, при $n=2000$ и $k=1000$ число операций сложения

$$N = 2000 \cdot 1000 - 1000^2 = 1000000,$$

что представляет для современных вычислительных средств относительно небольшую величину.

5 Биномиальные прямоугольники

Полученные выше равенства (11) и (12) и им соответствующие (23) и (22) можно использовать для построения специальных таблиц, которые будут содержать все возможные рекуррентные разложения биномиальных коэффициентов C_n^k на такие же коэффициенты, но с меньшими значениями параметров k и n.

Определение 2 Прямоугольные таблицы с последовательностями БК будем называть *биномиальными прямоугольниками* (БП).

Эти прямоугольники по своей информативности не уступают треугольникам Паскаля, а по удобству и скорости вычислений значений биномиальных коэффициентов их превосходят.

В настоящее время они позволили получить оригинальные решения ряда важных практических задач, к которым, например, относится рассматриваемый ниже способ биномиального матричного счета.

Учитывая возможную полезность БП и при решении других задач, автор решил в общих чертах изложить их структуру и свойства.

Начнем с примера. Представим, что нам задан биномиальный коэффициент C_n^k с $k=4$ и $n=7$.

Требуется преобразовать его в соответствующий символический прямоугольник, представляющий прямоугольную таблицу, состоящую из биномиальных коэффициентов. Для этого запишем в соответствии с (12) следующие уравнения:

$$\begin{aligned}
C_5^4 &= C_4^4 + C_3^3 + C_2^2 + C_1^1 + C_0^0 = 5;\\
C_6^4 &= C_5^4 + C_4^3 + C_3^2 + C_2^1 + C_1^0 = 15;\\
C_7^4 &= C_6^4 + C_5^3 + C_4^2 + C_3^1 + C_2^0 = 35;\\
C_8^4 &= C_7^4 + C_6^3 + C_5^2 + C_4^1 + C_3^0 = 70;\\
\hline
C_9^5 - 1 &= C_8^5 + C_7^4 + C_6^3 + C_5^2 + C_4^1 = 125.
\end{aligned}$$

Представим стоящие в правой части биномиальные коэффициенты первых четырех уравнений в виде специальной таблицы (табл. 2), а коэффициенты последнего пятого уравнения внесем в графу Σ, так как они представляют суммарные значения находящихся над ними биномиальных коэффициентов. Совместно они образуют значение равное сумме биномиальных коэффициентов, стоящих в самом правом столбце со знаком Σ, равной C_9^5.

Таблица 2 – Символический биномиальный прямоугольник

$i \backslash j$	4	3	2	1	0	Σ
0	C_4^4	C_3^3	C_2^2	C_1^1	C_0^0	C_5^4
1	C_5^4	C_4^3	C_3^2	C_2^1	C_1^0	C_6^4
2	C_6^4	C_5^3	C_4^2	C_3^1	C_2^0	C_7^4
3	C_7^4	C_6^3	C_5^2	C_4^1	C_3^0	C_8^4
Σ	C_8^5	C_7^4	C_6^3	C_5^2	C_4^1	$C_9^5 - 1$

Эта таблица представляет *символический* биномиальный прямоугольник. В нем значения верхних параметров биномиальных коэффициентов равны j,

где $j = 0,1,...,k$, а нижних - $i + j$, где $i = 0,1,...,n-k$.

Представим эту символическую таблицу или символический БП в виде *числового* БП. Для этого биномиальные коэффициенты заменим соответствующими им числами (см. табл. 3).

Таблица 3 – Числовой биномиальный прямоугольник

$i \backslash j$	4	3	2	1	0	Σ
0	1	1	1	1	1	5
1	5	4	3	2	1	15
2	15	10	6	3	1	35
3	35	20	10	4	1	70
Σ	56	35	20	10	4	125

Анализ приведенных двух таблиц показывает, что они обладают интересными и явно полезными свойствами.

Так, любой биномиальный коэффициент C_{i+j}^{j}, входящий в табл. 2, а в нее входят все коэффициенты со значением j от 0 до 4 и $i+j$ от 0 до 7, находится как сумма коэффициентов стоящей над ним строки, начиная со столбца, в котором находится искомый коэффициент, и до столбца с $j=0$.

Например, из табл. 2 следует, что $C_{2+2}^{2}=C_{4}^{2}=C_{3}^{2}+C_{2}^{1}+C_{1}^{0}$, и соответственно на основании табл. 3 можно записать, что $C_{4}^{2}=6$.

В общем же для того чтобы определить величину коэффициента C_{n}^{k}, в табл. 3 необходимо найти столбец с требуемым значением $k=j$, например $j=3$, а в столбце строку с величиной $i=n-k$, например, при числе $n=6$ $i=6-3=3$.

Тогда на пересечении выбранных строки $i=3$ и столбца $j=3$ будет находиться число, равное $C_{n}^{k}=C_{6}^{3}=20$ (см. табл. 3).

Этот же результат для C_{6}^{3} в табл. 3 можно получить и исходя из равенства (11). В этом случае складываются все биномиальные коэффициенты, стоящие в столбце с $j=2$ включительно до строки $i=3$, в которой стоит искомый биномиальный коэффициент:

$$C_{6}^{3}=C_{2}^{2}+C_{3}^{2}+C_{4}^{2}+C_{5}^{2}=1+3+6+10=20.$$

Кроме равенств (11, 12), в БП выполняется и правило Паскаля (10). Для его реализации необходимо взять любые два рядом стоящие биномиальных коэффициента по любой диагонали, идущей сверху вправо, и найти стоящий между ними биномиальный коэффициент в соседней слева диагонали. Например,

$$C_{5}^{3}=C_{4}^{3}+C_{4}^{2}=4+6=10.$$

Обратим также внимание, что если символический и числовой БП превратить в биномиальные квадраты (БК), как это имеет место в табл. 4 и 5, то получим строгую симметрию значений биномиальных коэффициентов относительно осевой диагонали БК, идущей сверху влево.

Таблица 4 – Числовой биномиальный квадрат

$i \backslash j$	3	2	1	0	Σ
0	1	1	1	1	4
1	4	3	2	1	10
2	10	6	3	1	20
3	20	10	4	1	35
Σ	35	20	10	4	69

Такая симметрия таблицы вызвана свойством симметрии биномиальных коэффициентов $C_n^k = C_n^{n-k}$, доказанном в теореме 7.

Таблица 5 – Символический биномиальный квадрат

$i \backslash j$	3	2	1	0	Σ
0	C_3^3	C_2^2	C_1^1	C_0^0	C_4^3
1	C_4^3	C_3^2	C_2^1	C_1^0	C_5^3
2	C_5^3	C_4^2	C_3^1	C_2^0	C_6^3
3	C_6^3	C_5^2	C_4^1	C_3^0	C_7^3
Σ	C_7^4	C_6^3	C_5^2	C_4^1	$C_8^4 - 1$

Таким образом, видим, что все основные свойства биномиальных коэффициентов, выраженных равенствами (8, 9, 11, 12), проявляются в биномиальных квадратах, а это означает, что с их помощью можно получать и ряд других результатов комбинаторики, основанных на биномиальных коэффициентах, что является задачей дальнейших исследований БК.

В общем виде символический БП можно представить следующим образом (см. табл. 6).

Таблица 6 – Символический биномиальный прямоугольник

$i \backslash j$	k	$k-1$	$\dots$	1	0	Σ
0	C_k^k	C_{k-1}^{k-1}	$\dots$	C_1^1	C_0^0	C_{k+1}^k
1	C_{k+1}^k	C_k^{k-1}	$\dots$	C_2^1	C_1^0	C_{k+2}^k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	C_n^k	C_{n-1}^{k-1}	$\dots$	C_{n-k+1}^1	C_{n-k}^0	C_{n+1}^k
Σ	C_{n+1}^{k+1}	C_n^k	$\dots$	C_{n-k+2}^2	C_{n-k+1}^1	$C_{n+2}^{k+1}-1$

Построение на его основе числового БП начинают заполнением единицами нулевой строки (см. табл. 7).

Таблица 7 – Числовой биномиальный прямоугольник в общей форме

$i \backslash j$	k	$k-1$	$\dots$	1	0	Σ
0	1	1	$\dots$	1	1	$k+1$
1	$k+1$	k	$\dots$	2	1	$\frac{(k+1)(k+2)}{2}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\dots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-k$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!}$	$\dots$	$n-k+1$	1	$\frac{(n+1)!}{k!(n-k+1)!}$
Σ	$\frac{(n+1)!}{(k+1)!(n-k)!}$	$\frac{n!}{k!(n-k)!}$	$\dots$	$\frac{(n-k+1)(n-k+2)}{2}$	$n-k+1$	$\frac{(n+2)!}{(k+1)!(n-k+1)!}$

В первой строке значение каждой позиции находится как сумма значений всех позиций разрядов предыдущей нулевой строки, начинающейся с позиции младшего разряда, до позиции, соответствующей искомой позиции первой строки включительно. Значения позиций разрядов второй строки находятся как сумма всех значений позиций разрядов первой строки до соответствующей искомой позиции второй строки включительно и т.д. Из приведенного следует, что столбец и строка позиции, соответствующей $j=0$ и $i=0$ будут заполнены единицами, а $j=1$ и $i=1$ - соответственно натуральными числами $1,2,...,n-k+1$ и $1,2,...,k+1$.

Заполнение БП можно производить и с помощью равенства (10) по диагоналям, направленным сверху вправо.

Полученный БП для больших значений n и k можно наращивать как влево при росте k, так и вниз при росте n.

Для БП характерно также и то, что числа по строке справа налево и по столбцу сверху вниз по абсолютной величине могут только возрастать.

Обратим внимание также на то, что в табл. 6 в каждом столб-це $j=0,1,...,k$ стоят биномиальные коэффициенты C_{i+j}^{j}, имеющие одно и то же значение верхнего параметра j, а значение нижнего для каждой новой строки $i=1,2,...,n-k$ увеличивается на 1. В результате в столбце j находятся все биномиальные коэффициенты от C_{j}^{j} и до C_{n-k+j}^{j}. Это значит, что из рассматриваемых таблиц можно получить значения всех биномиальных коэффициентов с заданным верхним параметром j и изменяющимися $n-k+1$ значениями нижних параметров от значения j и до $n-k+j$.

В той же табл. 6 по диагоналям, идущим сверху вправо, число которых $k+1+n-k=n+1$, находятся биномиальные коэффициенты с нижним постоянным параметром $i+j=0,1,...,k+n-k=n$ и с верхним параметром j.

Их число в каждой диагонали равно числу находящихся в ней биномиальных коэффициентов C_{i+j}^{j}, которое не больше $n-k+1$. Минимальное число биномиальных коэффициентов в диагоналях равно 1.

Между БП и ТП имеется тесная связь, так как БП представляет собой специальным образом выделенную часть треугольника. Чтобы установить эту связь, следует ТП повернуть вправо на 45° (см. табл. 8).

Таблица 8 – Повернутый вправо ТП

1	1	1	1	1	1
	5	4	3	2	1
		10	6	3	1
			10	4	1
				5	1
					1

Теперь выделим в полученной таблице БП, например, такой как показан в табл. 9.

Таблица 9 – Биномиальный прямоугольник

$i \backslash j$	3	2	1	0
0	1	1	1	1
1	4	3	2	1
2	10	6	3	1

Дополнив повернутый ТП в табл. 9 так, чтобы каждая его строка по длине равнялась первой (в данном случае первая строка содержит 6 элементов), получим биномиальный квадрат (м. табл. 10).

Этот квадрат состоит из двух треугольников. Первый - это широко известный треугольник Паскаля, а второй - обратный к нему.

Практическая полезность биномиальных прямоугольников состоит, прежде всего, в возможности с их помощью находить значения биномиальных коэффициентов C_n^k.

Таблица 10 – Биномиальный квадрат

$i \backslash j$	5	4	3	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1
1	6	5	4	3	2	1
2	21	15	10	6	3	1
3	56	35	20	10	4	1
4	126	70	35	15	5	1
5	252	126	56	21	6	1

Например, если надо вычислить биномиальный коэффициент C_5^3, то необходимо найти в табл. 10 столбец с номером $j=3$ и строку с номером $i=5-3=2$.

Результат будет находиться на пересечении данных строки и столбца $C_5^3=10$. Кроме того, БП дает возможность определять биномиальные коэффициенты, на которые можно разложить коэффициент C_n^k. Так, если $C_n^k=C_5^3=10$, то имеется возможность представить его с помощью биномиальных коэффициентов следующими способами: 10 = 6 + 3 + 1 и 10 = 4 + 3 +2 + 1.

Но основное назначение БП состоит в возможности с их помощью представлять матричные биномиальные числа, про которые речь будет идти ниже. В этом случае цифры, стоящие в БП, представляют собой возможные весовые коэффициенты биномиальных чисел.

Объединим символический и числовой прямоугольники в обобщенном биномиальном прямоугольнике (ОБП), приведенном в табл. 11.

В прямоугольнике элемент

$$A_{ij}=\sum_{\alpha=0}^{j} A_{(i-1)\alpha}\,; \qquad (26)$$

$$i=1,2,\ldots,k\,;\ A_{0j}=1\,;\ A_{i0}=1\,;$$

$$A_{1j}=A_{1(j-1)}+1\,,\ j=1,2,\ldots,k\,;$$

$$A_{i1} = A_{(i-1)1} + 1, \quad i = 1, 2, ..., n-k .$$

После задания элементов нулевой строки и нулевого столбца с помощью единиц остальные элементы прямоугольника могут быть получены с помощью равенства (26). В результате будет образован числовой БП.

Таблица 11 – Обобщенный Биномиальный прямоугольник

$i \backslash j$	k	$k-1$	$\ldots$	1	0
0	A_{0k}	$A_{0(k-1)}$	$\ldots$	A_{01}	A_{00}
1	A_{1k}	$A_{1(k-1)}$	$\ldots$	A_{11}	A_{10}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ldots$	$\vdots$	$\vdots$
$n-k-1$	$A_{(n-k-1)k}$	$A_{(n-k-1)(k-1)}$	$\ldots$	$A_{(n-k-1)1}$	$A_{(n-k-1)0}$
$n-k$	$A_{(n-k)k}$	$A_{(n-k)(k-1)}$	$\ldots$	$A_{(n-k)1}$	$A_{(n-k)0}$

Так как в символическом прямоугольнике $i+j$ равен нижнему параметру БК, то

$$A_{ij} = C_{i+j}^{j}, \qquad (27)$$

где $j = 0, 1, 2, ..., k$, $i = 0, 1, 2, ..., n-k$.

Коэффициент C_n^k будет получен в ОБП только после суммирования всех элементов предпоследней $(n-k-1)$-й строки

$$C_n^k = A_{(n-k-1)k} + A_{(n-k-1)(k-1)} + ... + A_{(n-k-1)1} + A_{(n-k-1)0}. \qquad (28)$$

В качестве примера в табл. 12 приведен числовой прямоугольник с значением $k = 9$, $n = 18$. Он может быть использован для поиска значений биномиальных коэффициентов с параметрами $k = 9$ и $n = 18$.

Таблица 12 – Числовой биномиальный прямоугольник с $k = 9$, $n = 18$

$i \backslash j$	9	8	7	6	5	4	3	2	1	0
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
2	55	45	36	28	21	15	10	6	3	1
3	220	165	120	84	56	35	20	10	4	1
4	715	495	330	210	126	70	35	15	5	1
5	2002	1287	792	462	252	126	56	21	6	1
6	5105	3103	1716	924	462	210	84	28	7	1
7	11640	6535	3432	1718	792	330	180	36	8	1
8	24710	13070	6535	3103	1287	495	165	45	9	1
9	49420	24710	11640	5105	2002	715	220	55	10	1

Приведенный выше анализ показывает, что БП и последовательности БК представляют одни и те же зависимости, но выраженные в разных формах. При этом если последовательности БК более удобны для использования в цифровых машинах, то БП, в силу своей структуры и обозримости, для непосредственной работы с ними человека, а также для реализации в виде быстродействующих цифровых устройств с матричной обработкой информации.

6 Биномиальные параллелограммы

Если в биномиальном прямоугольнике сдвинуть на один столбец влево каждую строку по отношению к предшествующей, за исключением нулевой, которая, являясь базовой, остаётся неподвижной, то будет получен биномиальный параллелограмм (БПЛ), содержащий $j' = (n-k)+(k+1) = n+1$ столбцов и $n-k+1$ строк, как это показано в табл.13, 14, 15 для $n = 6$, $k = 3$.

Определение 3 Прямоугольная таблица со сдвинутыми на один разряд влево строками по отношению к верхним, называется биномиальным параллелограммом.

Таблица 13 – Символический биномиальный параллелограмм

$i \backslash j'$	6	5	4	3	2	1	0
0				C_3^3	C_2^2	C_1^1	C_0^0
1			C_4^3	C_3^2	C_2^1	C_1^0	
2		C_5^3	C_4^2	C_3^1	C_2^0		
3	C_6^3	C_5^2	C_4^1	C_3^0			

Таблица 14 – Числовой биномиальный параллелограмм

$i \backslash j'$	6	5	4	3	2	1	0
0				1	1	1	1
1			4	3	2	1	
2		10	6	3	1		
3	20	10	4	1			

Таблица 15 - Символический биномиальный параллелограмм в общем виде

$i \backslash j'$	n	$\dots$	$k+1$	k	$\dots$ 2	1	0
0				C_k^k	$\dots$	C_1^1	C_0^0
1			C_{k+1}^k	$\dots$	C_2^1	C_1^0	
$\vdots$		$\iddots$		$\iddots$	$\iddots$		
$n-k$	C_n^k	$\dots$	C_{k+1}^1	C_k^0			

БПЛ обладает важными свойствами, используемыми ниже для реализации биномиального каскадного счёта.

Первое из них состоит в том, что в каждом столбце параллелограмма $j' = 0,1,...,n$ будут находиться биномиальные коэффициенты с нижними параметрами, равными значениям j'.

Их верхние параметры при этом будут изменяться от величины $j' - i$, $i = 0,1,...,n-k$, и до 0, если биномиальные коэффициенты размещаются в столбцах с номерами $j' \le k$. В противном случае при значениях $j' = k+1$ верхний параметр оканчивается 1, при $j' = k+2$ - 2. Так идет до величины $j' = k + (n-k) = n$, при которой верхний параметр равен k.

Вторым свойством БПЛ является то, что любые два, стоящие в столбце j' биномиальные коэффициента $C_{j'}^{j'-i}$ и $C_{j'}^{j'-(i+1)}$, образуют при суммировании биномиальный коэффициент, стоящий в строке $i+1$ и столбце $j'+1$:

$$C_{j'}^{j'-i} + C_{j'}^{j'-(i+1)} = C_{j'+1}^{j'-i}. \qquad (29)$$

Третьим свойством БПЛ является то, что в нём по линиям расположения биномиальных коэффициентов параллельным боковым сторонам параллелограмма будут находиться коэффициенты, имеющие одинаковые верхние параметры, равные номеру $j' = 0,1,...,k$ столбца, в котором находится биномиальный коэффициент нулевой строки, а нижние параметры при этом будут определяться номером $j' = 0,1,...,n$ столбца, в котором находится биномиальный коэффициент.

Четвёртым свойством БПЛ является условие, что сумма любой части биномиальных коэффициентов, расположенных параллельно боковым сторонам БПЛ, начинающихся с коэффициента $C_{j'}^{j'}$ нулевой строки и оканчивающихся коэффициентом $C_{j'+i}^{j'}$ в строке i, равна соседнему коэффициенту $C_{j'+i+1}^{j'+1}$, стоящему в той же i-й строке слева:

$$C_{j'}^{j'} + C_{j'+1}^{j'} + \ldots + C_{j'+i}^{j'} = C_{j'+i+1}^{j'+1}. \qquad (30)$$

К пятому свойству БПЛ относится условие, что сумма биномиальных коэффициентов любой начальной части i-й строки,

$$C_i^0 + C_i^1 + \ldots + C_i^{j'} = C_{i+1}^{j'}, \qquad (31)$$

то есть равна коэффициенту с параметром j', стоящим в соседней строке $i+1$.

Часть 3 Биномиальные системы счисления

7 Линейные биномиальные системы счисления

Ниже предлагаются разработанные автором структурные комбинаторные системы счисления с биномиальными весами и двоичным алфавитом $\{1,\ 0\}$ – *биномиальные двоичные системы счисления* [11] (автором еще разработан и многозначный вариант биномиальных систем счисления). Их диапазон $P = C_n^k$.

Определение 4 Система счисления, в которой количественный эквивалент кодовой комбинации $A_i = (a_{j\text{-}1},\ a_{j\text{-}2}, ..., a_0)$, $i = 0,1,..., P-1$, определяется выражением

$$A_i = a_{j-1} C_{n-1}^{k-q_j} + ... + a_l C_{n-j+l}^{k-q_{l+1}} + ... + a_0 C_{n-j}^{k-q_1} \qquad (32)$$

при соблюдении ограничений:

$$\begin{cases} q_0 = k, & (33) \\ k \le j \le n-1, & (34) \\ a_0 = 1, & (35) \end{cases}$$

$$\begin{cases} n-k = j - q_0, & (36) \\ 0 \le q_0 \le k-1, & (37) \\ a_0 = 0, & (38) \end{cases}$$

где k - число единиц в биномиальном числе;

n - параметр системы счисления;

j - количество разрядов биномиального числа (длина);

$l = 0,1,..., j-1$ - порядковый номер разряда;

q_{l+1} - сумма единичных значений цифр от $(j-1)$-го разряда до $(l+1)$-го включительно:

$$q_{l+1} = \sum_{\gamma=l+1}^{j-1} a_\gamma , \qquad (39)$$

$$a_\gamma \in \{0,1\},$$

$$q_j = a_j = 0,$$

называется линейной биномиальной системой счисления, а число A_i - линейным биномиальным двоичным числом.

Система счисления должна удовлетворять требованиям *конечности, эффективности, однозначности*. Однако этих требований для нестепенных систем счисления недостаточно.

Необходимо, чтобы биномиальные числа образовывали префиксный код, позволяющий отличать одни кодовые комбинации от других. По этому требованию любая кодовая комбинация не может быть началом другой.

Кроме того, необходимо, чтобы биномиальные числа из диапазона P образовывали начальную часть натурального ряда, начинающуюся с 0. В этом случае для каждой кодовой комбинации числа из заданного диапазона P существует другая, численное значение которой больше первой на единицу. Исключение делается только для комбинации наибольшего числа.

Из выражения (32) следует, что требования конечности и эффективности для биномиальных систем счисления выполняются, т. е. существует вычислительный алгоритм, который за конечное число шагов осуществляет переход от биномиальной кодовой комбинации A_i ограниченной длины к соответствующему числу.

Докажем, что требование префиксности кодовых комбинаций для биномиальных чисел также удовлетворяется.

Биномиальные кодовые комбинации, удовлетворяющие ограничениям (33 - 35), должны содержать k единиц. Поэтому появление в биномиальной комбинации k-*й* единицы является признаком ее конца. Так как в соответствии с ограничением (34) наибольшая длина указанных комбинаций равна $n-1$, то их длины принимают значения в пределах от k до $n-1$ ($k \le j \le n-1$).

Соответственно количество содержащихся в них нулей $l = 0,1,...,n-k-1$, а длина $j = k+l$. Количество различающихся комбинаций одинаковой длины, содержащих k единиц и l нулей, равно числу сочетаний l нулей из $j-1$ элементов C_{k+l-1}^{l}. Эти комбинации, являясь сочетаниями, обладают по отношению друг к другу очевидным свойством префиксности. Длины комбинаций, принадлежащие к группам с разным значением l, различны. Так как в конце этих комбинаций стоят единицы и их общее число постоянно и равно k, то более длинные комбинации в префиксной части, равной длине меньшей комбинации, содержат, как минимум, на одну единицу меньше.

Таким образом, против хотя бы одного из нулей меньшей комбинации в префиксной части большей будет стоять единица. Следовательно, свойство префиксности соблюдается для всех комбинаций, удовлетворяющих ограничениям (33 - 35).

Как следует из (36 - 38), число нулей в биномиальных комбинациях является постоянным и равным ($n-k$). Поэтому появление ($n-k$)-го нуля в комбинации представляет признак ее окончания. Сумма ($n-k$) нулей с числом единиц $q_0 = 0,1,...,k-1$ определяет длину $j = n-k+q_0$ биномиальных комбинаций. Число различных комбинаций с q_0 единицами и нулем в конце определяется количеством сочетаний q_0 единиц из ($j-1$) элементов - $C_{n-k+q_0-1}^{q_0}$. Свойство префиксности для них очевидно.

Комбинации, принадлежащие к группам, содержащим разное число единиц, имеют разную длину. При этом меньшие из них, которые могут быть префиксом более длинных, содержат ($n-k$) нулей. Более длинные также содержат ($n-k$) нулей, но так как в конце тех и других стоит нуль, то их префиксная часть, равная длине меньшей комбинации, содержит, как минимум, на один нуль меньше, что свидетельствует об их префиксности.

Кодовые комбинации рассмотренных выше двух классов также обладают свойством префиксности между собой, так как отличаются числом содержащихся в них единиц и нулей.

Таким образом, среди всех комбинаций, удовлетворяющих ограничениям (33 – 38), отсутствуют комбинации, которые могли бы быть началом других, т. е. свойство префиксности для них соблюдается.

Из свойства префиксности следует, что две произвольные биномиальные комбинации имеют хотя бы в одном одноименном разряде при счете слева направо различные цифры (0 и 1). Предшествующие этому разряду части комбинации, если они присутствуют, являются для указанных цифр общими, а последующие части совместно с ним - собственными. Если собственные части двух произвольных биномиальных комбинаций не могут представлять одно и то же число, то свойство однозначности биномиальной системы счисления будет доказано. Рассмотрим собственные части двух биномиальных комбинаций:

$$A_q = (a_\alpha,...,a_0) \text{ и } A_l = (a_\beta,...,a_0),$$

где $a_\alpha = 0$, $a_\beta = 1$; $q,l = 0,1,...,P-1$; $\alpha,\beta = 0,1,...,n-1$; $q \neq l$.

Если допустить, что для комбинации A_q цифры, следующие за старшим разрядом, равны 1, а в комбинации A_l - 0, то разность между количественными значениями комбинаций A_l и A_q будет минимальной и равной 1. Докажем это.

Представим числа A_q и A_l в виде

$$A_q = 0C_{n-j+\alpha}^{k-q_{\alpha+1}} + 1C_{n-j+\alpha-1}^{k-q_{\alpha+1}} + 1C_{n-j+\alpha-2}^{k-q_{\alpha+1}-1} + \ldots + 1C_{n-j+\alpha-\alpha}^{k-q_{\alpha+1}-\alpha+1},$$

$$A_l = 1C_{n-j+\beta}^{k-q_{\beta+1}} + 0C_{n-j+\beta-1}^{k-q_{\beta+1}-1} + 0C_{n-j+\beta-2}^{k-q_{\beta+1}-1} + \ldots + 0C_{n-j+\beta-\beta}^{k-q_{\beta+1}-1}.$$

Так как

$$\sum_{i=1}^{\alpha} C_{n-j+i-1}^{k-q_{\alpha+1}-\alpha+i} = C_{n-j+\alpha}^{k-q_{\alpha+1}} - 1 = A_q$$

и $C_{n-j+\alpha}^{k-q_{\alpha+1}} = C_{n-j+\beta}^{k-q_{\beta+1}} = A_l$, то $A_l = A_q + 1$.

Следовательно, свойство однозначности для биномиальной системы счисления выполняется.

Максимальное число в биномиальной системе счисления в соответствии с выражением (32)

$$1C_{n-1}^{k-q_j} + 1C_{n-2}^{k-q_j-1} + \ldots + 1C_{n-j}^{k-q_1} = C_n^k - 1 = P - 1,$$

а минимальное число равно нулю.

Количество биномиальных комбинаций, содержащих в конце единицу,

$$N_1 = \sum_{i=0}^{n-k-1} C_{n-2-i}^{n-k-1-i} = C_{n-1}^{n-k-1} = C_{n-1}^{k}. \qquad (40)$$

Число комбинаций, содержащих в конце нуль,

$$N_0 = \sum_{i=0}^{k-1} C_{n-2-i}^{k-1-i} = C_{n-1}^{k-1}. \qquad (41)$$

Их суммарное количество

$$N = C_{n-1}^{k} + C_{n-1}^{k-1} = C_n^k. \qquad (42)$$

Так как каждой биномиальной комбинации вследствие свойства однозначности соответствует свое число и при этом минимальное равно 0, а максимальное - C_{n-1}^{k} и их количество равно C_n^k, то диапазон представимых чисел $P = C_n^k$.

8 Линейно-циклические биномиальные системы счисления

Кроме исследованной выше возможности вычисления числа сочетаний C_n^k, биномиальные последовательности позволяют получать позиционные системы счисления.

Определение 5 Система счисления, построенная на основе одной или ряда *линейно* расположенных последовательностей биномиальных коэффициентов с *циклически* выполняемыми над ними операциями, называется *линейно-циклической биномиальной системой счисления* (ЛЦБСС).

Биномиальные коэффициенты в используемых ЛЦБСС последовательностях расположены в обратном порядке по сравнению с рассматриваемыми ранее, то есть порядок расположения биномиальных коэффициентов в *i*-й последовательности

$$C_i^0 \;\; C_{i+1}^1 \; \ldots C_{i+j}^j \ldots C_{i+k}^k$$

заменяется при ее использовании в ЛЦБСС на обратный:

$$C_{i+k}^k \;\; C_{i+k\text{-}1}^{k\text{-}1} \ldots C_{i+j}^j \ldots C_i^0,$$

$$i = 0,1,\ldots,n-k\,;\;\; j = 0,1,\ldots,k\,.$$

Так как биномиальный коэффициент C_i^0 присутствует во всех без исключения последовательностях, то в дальнейшем исключим его из них, предполагая его наличие по умолчанию.

Это значит, что используемые в ЛЦБСС последовательности в качестве младшего разряда будут иметь первый разряд и соответственно приобретут вид

$$C_{i+k}^k C_{i+k-1}^{k-1} \ldots C_{i+j}^j \ldots C_{i+1}^1\,.$$

Полученные таким образом биномиальные последовательности будут располагаться в следующем порядке:

$$C_n^k C_{n-1}^{k-1} \ldots C_{n-k+1}^1, C_{n-1}^k C_{n-2}^{k-1} \ldots C_{n-k}^1, \ldots,$$

$$C_{i+k}^k C_{i+k-1}^{k-1} \ldots C_{i+1}^1, \ldots, C_k^k C_{k-1}^{k-1} \ldots C_1^1,$$

$$i = 0,1,\ldots,n-k\,.$$

Важнейшим свойством этих последовательностей является возможность представления каждого биномиального коэффициента с помощью суммы коэффициентов предшествующей последовательности плюс 1.

Так, например, коэффициент C_n^k для последовательности с $i = n-k$ представляется суммой коэффициентов предшествующей последовательности с $i = n-k-1$ следующим образом:

$$C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-2}^{k-1} + \ldots + C_{n-k}^1 + 1. \qquad (43)$$

В общем случае применительно к любому $j = 1,\ldots,k$ приведенное свойство последовательностей биномиальных коэффициентов $i = 0,1,\ldots,n-k$ будет иметь следующий вид:

$$C_{i+j}^j = C_{(i+j)-1}^j + C_{(i+j)-2}^{j-1} + \ldots + C_{(i+j)-k}^1 + 1. \qquad (44)$$

Например, если даны символьные биномиальные последовательности $\underset{i=2}{C_4^2 C_3^1}$, $\underset{i=1}{C_3^2 C_2^1}$, $\underset{i=0}{C_2^2 C_1^1}$, то на основе свойства (44) получим, что

$$C_4^2 = C_3^2 + C_2^1 + 1,\; C_3^1 = C_2^1 + 1,\; C_3^2 = C_2^1 + 1,\; C_2^1 = C_1^1 + 1.$$

Именно на этом свойстве основана работа ЛЦБСС.

Определение 6 Функция

$$F_i = x_{ik} C_{i+k}^k + x_{i(k-1)} C_{i+k-1}^{k-1} + \ldots + x_{ij} C_{i+j}^j + \ldots + x_{i1} C_{i+1}^1, \qquad (45)$$

где $x_{ij} \in \{0,1\}$ - цифры, задаваемые i-й последовательностью, называется i-й частной числовой функцией (частным числом) двоичной ЛЦБСС.

Определение 7 Функция

$$F = \sum_{i=0}^{n-k} F_i = \sum_{i=0}^{n-k} \sum_{j=1}^{k} x_{ij} C_{i+j}^j \qquad (46)$$

называется числовой функцией ЛЦБСС или числом F в ЛЦБСС.

Определение 8 Биномиальные коэффициенты, входящие в числовую функцию ЛЦБСС, называются ее *весами*.

Допустим, что в последовательности $i = 0,1,\ldots,n-k$ цифра x_{ij} и следующие за ней цифры младших разрядов $x_{i(j-1)}$, $x_{i(j-2)},\ldots,x_1$ равны 1, а предшествующие ей цифры равны 0.

В этом случае в соответствии с (45) частная числовая функция

$$F_i = C_{i+j}^{j} + C_{i+(j-1)}^{j-1} + \ldots + C_{i+1}^{1} \qquad (47)$$

или

$$F_i = C_{(i+j)+1}^{j} - 1 = C_{(i+1)+j}^{j} - 1. \qquad (48)$$

Поэтому, чтобы получить следующее по порядку число, большее на 1 числа F_i с единичными младшими разрядами необходимо, обнулить все эти разряды и установить в 1 j-й разряд числа F_{i+1}.

Следовательно, цикл счёта на основе i-й последовательности состоит в установке её сначала j-го разряда и затем последовательно остальных младших разрядов в 1 и организации после этого переноса единицы в j-й разряд числа F_{i+1}. После того аналогичный цикл счёта производится для ($j-1$)-го разряда числа F_i и установке ($j-1$)-го разряда числа F_{i+1} в 1 и т.д. до первого разряда. В результате все разряды числа F_{i+1}, начиная с j-го, окажутся установленными в 1.

Установка в 1 разрядов числа F_i происходит в результате аналогичных циклов счёта в числе F_{i-1}, а у того после циклов счёта в числе F_{i-2} и т.д. до числа

$$F_0 = x_j + x_{j-1} + \ldots + x_1, \qquad (49)$$

которое получено в результате постепенного заполнения единицами его разрядов от j-го до первого.

Если после проведенных k циклов счёта в ($n-k$)-м частном числе во всех без исключения разрядах будут стоять единицы, то

$$F_{i=n-k} = C_n^k + C_{n-1}^{k-1} + \ldots + C_{n-k+j}^{j-1} + \ldots + C_{n-k+1}^{1} = C_{n+1}^{k} - 1. \qquad (50)$$

Число $F_{i=n-k}$, содержащее единицы во всех k разрядах, представляет наибольшее число $F_{\max}$, которое можно представить в ЛЦБСС. Как следует из равенства (50),

$$F_{\max} = C_{n+1}^{k} - 1. \qquad (51)$$

Соответственно диапазон представимых в ЛЦБСС чисел

$$P = C_{n+1}^{k}. \qquad (52)$$

Полученные выше соотношения позволяют сформулировать правило перебора (счёта) линейно-циклических биномиальных чисел.

Оно состоит в последовательном заполнении по циклам единицами разрядов числа F_i, начиная с k-го и до первого $j = 0,1,...,k$ включительно, и затем выработки 1 переноса в j-й разряд соседнего старшего числа F_{i+1} и обнуления младших разрядов.

Начинается счёт с нулевого частного числа F_0 с разряда $j = k$ заполнением единицами всех младших разрядов до разряда с $j = 1$, затем с разряда $j = k - 1$ и так далее до разряда $j = 1$. Каждый раз после заполнения единицами всех младших разрядов числа F_0 образуются переносы в соседнее старшее число и обнуляются собственные разряды. Затем аналогичные циклы происходят с числами F_1, F_2 и так до F_{n-k}. Циклы заканчиваются, когда в старшем частном числе $F_{j=n-k}$ во всех разрядах появятся единицы.

Например, если имеются представленные в числовом виде три последовательности биномиальных коэффициентов с параметрами $n = 4$, $k = 2$,: 6 3; 3 2 и 1 1, то для них в соответствии с (44, 45) имеются три частные числовые функции:

$$F_2 = x_{22}C_4^2 + x_{21}C_3^1 = x_{22} \cdot 6 + x_{21} \cdot 3,$$

$$F_1 = x_{12}C_3^2 + x_{11}C_2^1 = x_{12} \cdot 3 + x_{11} \cdot 2,$$

$$F_0 = x_{02}C_2^2 + x_{01}C_1^1 = x_{02} \cdot 2 + x_{01} \cdot 1,$$

которые совместно образуют числовую функцию ЛЦБСС:

$$F = F_2 + F_1 + F_0 = (x_{22} \cdot 6 + x_{21} \cdot 3) + (x_{12} \cdot 3 + x_{11} \cdot 2) + (x_{02} \cdot 2 + x_{01} \cdot 1).$$

В символьной форме она имеет вид

$$F = (x_{22} \cdot C_4^2 + x_{21} \cdot C_3^1) + (x_{12} \cdot C_3^2 + x_{11} \cdot C_2^1) + (x_{02} \cdot C_2^2 + x_{01} \cdot C_1^1).$$

В исходном состоянии при счёте все цифры числа F $(x_{22}x_{21})$, $(x_{12}x_{11})$, $(x_{02}x_{01})$ равняются 0, т.е. $F = 00\,00\,00$. Затем цифра x_{02} числа F_0 преобразуется в 1 ($F = 00\,00\,10$), а за ней в 1 переходит цифра x_{01} ($F = 00\,00\,11$). После этого происходит перенос 1 в соседнее слева частное число F_1 во второй разряд: $F = 00\,10\,00$.

Затем процедура счёта повторяется с той существенной разницей, что занесение 1 в число F_0 происходит не во второй разряд, а в первый: $F = 00\,10\,01$. После происходит переход в первый разряд частного числа F_1 ($F = 00\,11\,00$). После появления двух единиц в частном числе F_1 происходит обнуление его разрядов и одновременно осуществляется перенос 1 во второй разряд частного числа F_2 ($F = 10\,00\,00$). Процесс счёта заканчивается, когда число F примет вид 11 00 00.

Процедура линейно-циклического биномиального счёта в возрастающем порядке всех чисел из диапазона $P = C_5^2 = 10$, получаемых на основе $n - k + 1 = 3$ биномиальных последовательностей с числом разрядов $k = 2$ и значением параметра $n = 4$, приведена в табл.16. В данном случае числа $k = 2$ и $n = 4$ представляют параметры ЛЦБСС, с помощью которых соответственно определяется число k разрядов в частных числовых функциях и число $n - k + 1$ последовательностей биномиальных коэффициентов.

Таблица 16 – Линейно-циклические биномиальные числа

Номер числа	Веса 6 3 F_2 x_{22} x_{21}	Веса 3 2 F_1 x_{12} x_{11}	Веса 1 1 F_0 x_{02} x_{01}
0	0 0	0 0	0 0
1	0 0	0 0	1 0
2	0 0	0 0	1 1
3	0 0	1 0	0 0
4	0 0	1 0	0 1
5	0 0	1 1	0 0
6	1 0	0 0	0 0
7	1 0	0 0	0 1
8	1 0	0 1	0 0
9	1 1	0 0	0 0

9 Матричные биномиальные системы счисления

Определение 9 ЛЦБСС, представленная в матричной форме с помощью БП или БПЛ, называется матричной биномиальной системой счисления.

Основу двоичных матричных биномиальных систем счисления (МБСС) составляют ЛЦБСС, которые преобразуются в матрицу таким образом, чтобы последовательности произведений биномиальных коэффициентов C_{i+j}^{j} на соответствующие им цифры x_{ij} частных чисел F_i, $i = 0,1,...,n-k$; $j = 1,2,...,k$; $x_{ij} \notin \{0,1\}$ образовывали строки. Верхняя из них образуется числом F_0, затем под ней идет строка, образуемая числом F_1, и т.д. продолжается до строки, образуемой числом F_{n-k}.

Соответственно столбцы образуют произведения $x_{ij}C_{i+j}^{j}$, принадлежащие разряду j всех частных чисел F_i (см. табл. 17).

Таблица 17 – Матричная биномиальная система счисления

$i \backslash j$	k	$k-1$	…	1
0	$x_{0k}C_k^k$	$x_{0(k-1)}C_{k-1}^{k-1}$	…	$x_{01}C_1^1$
1	$x_{1k}C_{k+1}^k$	$x_{1(k-1)}C_k^{k-1}$	…	$x_{11}C_2^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	…	$\vdots$
$n-k$	$x_{nk}C_n^k$	$x_{n(k-1)}C_{n-1}^{k-1}$	…	$x_{n1}C_{n-k+1}^1$

Очевидно, что если произвести суммирование по строкам, то будут получены частные числа F_i, а если эту операцию выполнить по всем элементам $x_{ij}C_{i+j}^{j}$ матрицы, то будет получено число F, ибо

$$F = \sum_{i=0}^{n-k}\sum_{j=1}^{k} x_{ij}C_{i+j}^{j} .$$

Так как x_{ij} может принимать лишь два значения 0 и 1, то при записи конкретных чисел в матричной биномиальной форме ее можно упростить, записывая лишь те элементы матрицы, где $x_{ij}=1$, как, например, записано в табл. 18. Такая матрица называется *весовой*.

Таблица 18 – Пример записи в весовой матрице матричного биномиального числа

$i \backslash j$	3	2	1
0			C_1^1
1	C_4^3	C_3^2	
2			

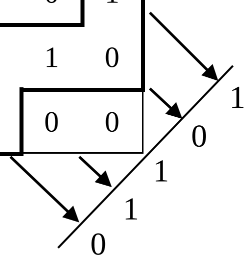
После сложения биномиальных коэффициентов, задаваемых в табл. 18, получим представляемое ею число

$$C_4^3+C_3^2+C_1^1=4+3+1=8\,.$$

Кодовое изображение этого числа в виде двоичной биномиальной матрицы будет иметь вид, приведенный в табл. 19.

Таблица 19 – Кодирование числа с помощью двоичной числовой биномиальной матрицы

$i \backslash j$	3	2	1
0	0	0	1
1	1	1	0
2	0	0	0



Чтобы перейти от числа, представленного в матричной биномиальной форме, к линейно-циклической, достаточно выполнить операцию развертки - обратную операции свертки частных чисел F_i. При этом нижняя строка представляет частное число F_{n-k}, следующая, сверху за ней, – число F_{n-k-1} и т.д. до начальной строки, представляющей младшее частное число F_0.

Для перехода матричного биномиального числа к его линейной форме достаточно в матрице произвести логическое суммирование по всем ее диагоналям, направленным сверху вправо. В табл. 19 в результате таких операций будет получено линейное биномиальное число 01101, которое в соответствии с выражением (32) равно 8.

Второй способ преобразования чисел из МБСС в линейную форму состоит в последовательном выписывании из двоичной матрицы по столбцам снизу вверх, начиная с k-го, последовательности нулей до появления первой 1, которая также включается в эту последовательность, и затем происходит переход по строке, в которой стоит 1, к следующему справа столбцу, и в нем снова происходит выписывание нулей до 1 и так до столбца нулевого разряда.

Например, в табл. 19 движение по столбцам выделено линиями. При преобразовании полученной фигуры в строку будет получено искомое число 01101.

Третий путь преобразования матричного изображения биномиального числа в его линейную форму состоит в замене каждых k нулей, стоящих перед первой единицей при счете от начала старшей строки или между двумя единицами, одним нулем и линейной записью полученных таким образом нулей и стоявших в матрице единиц.

Если в качестве примера обратится к табл. 19, то в старшей строке стоят три нуля, число которых равно $k = 3$ (000). Поэтому в старшем разряде линейного биномиального числа ставится 0. Затем идут две единицы, между которыми нули отсутствуют. Поэтому они переносятся в линейное число без изменений (011). За этими единицами до новой младшей 1 идут три нуля, которые в соответствии с правилом должны замениться на один 0 и после этого нуля записывается оставшаяся 1, т.е. будет получено в итоге линейное биномиальное число 01101.

Правило перехода из линейной формы представления числа в матричную форму основывается на свойствах ЛЦБСС. Оно состоит в увеличении числа нулей, стоящих перед первой единицей или между единицами, в k раз. В результате происходит переход от линейной формы к изображению числа в ЛЦБСС, а затем от нее по приведенному выше правилу уже непосредственно в матричную форму. Так, например, линейное биномиальное число 01101 сначала преобразовывается в число ЛЦБСС с $k = 3$ 000110001 и затем в матричное изображение биномиального числа (табл. 19).

Часть 4 Биномиальный счет

10 Линейный и линейно-циклический биномиальный счет

В таблице 20 для $n = 6$ и $k = 4$ приведены биномиальные комбинации и их количественные эквиваленты, формирование которых осуществляется на основании линейного биномиального счета.

Таблица 20 – Биномиальные числа с их количественными эквивалентами

Биномиальное число	Количественный эквивалент
00	$0 \cdot C_5^4 + 0 \cdot C_4^4$
010	$0 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^4 + 0 \cdot C_3^3$
0110	$0 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^4 + 1 \cdot C_3^3 + 0 \cdot C_2^2$
01110	$0 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^4 + 1 \cdot C_3^3 + 1 \cdot C_2^2 + 0 \cdot C_1^1$
01111	$0 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^4 + 1 \cdot C_3^3 + 1 \cdot C_2^2 + 1 \cdot C_1^1$
100	$1 \cdot C_5^4 + 0 \cdot C_4^3 + 0 \cdot C_3^3$
1010	$1 \cdot C_5^4 + 0 \cdot C_4^3 + 1 \cdot C_3^3 + 0 \cdot C_2^2$
10110	$1 \cdot C_5^4 + 0 \cdot C_4^3 + 1 \cdot C_3^3 + 1 \cdot C_2^2 + 0 \cdot C_1^1$
10111	$1 \cdot C_5^4 + 0 \cdot C_4^3 + 1 \cdot C_3^3 + 1 \cdot C_2^2 + 1 \cdot C_1^1$
1100	$1 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^3 + 0 \cdot C_3^2 + 0 \cdot C_2^2$
11010	$1 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^3 + 0 \cdot C_3^2 + 1 \cdot C_2^2 + 0 \cdot C_1^1$
11011	$1 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^3 + 0 \cdot C_3^2 + 1 \cdot C_2^2 + 1 \cdot C_1^1$
11100	$1 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^3 + 1 \cdot C_3^2 + 0 \cdot C_2^1 + 0 \cdot C_1^1$
11101	$1 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^3 + 1 \cdot C_3^2 + 0 \cdot C_2^1 + 1 \cdot C_1^1$
1111	$1 \cdot C_5^4 + 1 \cdot C_4^3 + 1 \cdot C_3^2 + 1 \cdot C_2^1$

Его алгоритм содержит следующие шаги:

1 Формируется начальная комбинация, состоящая из ($n - k$) нулей.

2 В нулевой разряд записывается единица и проверяется число

единиц в комбинации.

3 Если число единиц меньше k, то справа от полученной 1 записывается 0 и переход к пункту 2.

4 Пункт 2 повторяется до тех пор, пока число единиц в кодовом слове не станет равным k.

5 Если k единиц занимают в комбинации k старших разрядов, то останов, а если нет, то в разряд, содержащий младший 0, записывается 1.

6 Если при этом число единиц в комбинации не стало равным k, то справа от преобразованного разряда, содержащего 1, записываются нули до тех пор, пока их общее число не станет равным ($n-k$).

7 Возврат к пункту 2.

8 Если число единиц в комбинации по пункту 6 стало равным k, то переход к пункту 5.

Полезными свойствами биномиального счета являются его помехоустойчивость и возможность организации на его основании перебора комбинаций биномиальных кодов.

Для обнаружения ошибок с помощью биномиальных комбинаций необходимо дополнить их нулями или единицами до получения равномерного ($n-1$)-разрядного биномиального кода, как это приведено в табл. 21.

Основными признаками ошибки в биномиальной комбинации является превышение числа единиц в ней величины k, или числа нулей величины ($n-k$), стоящих перед последней младшей 1.

В табл.22 приведен переход от биномиальной комбинации к коду с постоянным весом, который осуществляется приписыванием к комбинации единиц, если она содержит ($n-k$) нулей, или нулей, если в ней содержится k единиц, до тех пор, пока ее длина не станет равной n.

Таблица 21 – Неравномерные и равномерные биномиальные числа

Номер	Биномиальный код	Биномиальный равномерный код	Номер	Биномиальный код	Биномиальный равномерный код
0	00	00000	8	10111	10111
1	010	01000	9	1100	11000
2	0110	01100	10	11010	11010
3	01110	01110	11	11011	11011
4	01111	01111	12	11100	11100
5	100	10000	13	11101	11101
6	1010	10100	14	1111	11110
7	10110	10110			

Таблица 22 – Биномиальные числа с соответствующими им равновесными комбинациями

Номер	Биномиальный код	Код с постоянным весом	Номер	Биномиальный код	Код с постоянным весом
0	00	001111	8	10111	101110
1	010	010111	9	1100	110011
2	0110	011011	10	11010	110101
3	01110	011101	11	11011	110110
4	01111	011110	12	11100	111001
5	100	100111	13	11101	111010
6	1010	101011	14	1111	111100
7	10110	101101			

Биномиальная комбинация является биномиальным номером комбинации с постоянным весом, т. е. является ее сжатым отображением. Если есть необходимость представить ее номером в естественной системе счисления, то тогда необходимо воспользоваться выражением (32).

Рассмотренную выше, в разделе 8, процедуру счёта линейно-циклических биномиальных чисел в общем виде можно представить в виде следующего алгоритма:

1 Формируется начальное число F, состоящее из $n-k+1$ частных чисел F_i, $i=0,1,...,n-k$, содержащих по k нулей.

2 Начиная с k-го разряда в число F_i записываются единицы до появления 1 в первом разряде. Начало счета происходит с частного числа $i=0$ и разряда $j=k$.

3 Происходит перенос 1 в k -й разряд числа F_{i+1}.

4 Начиная с ($k-1$)-го разряда в числе F_i записываются 1 до появления 1 в первом разряде и затем происходит перенос в ($k-1$)-й разряд числа F_{i+1}.

5 Пункт 4 повторяется до тех пор, пока не будет заполнено единицами число F_{i+1}, а в числе F_i не будут стоять нули.

6 После этого произойдёт перенос 1 в k -й разряд числа F_{i+2}, и затем цикл счёта повторяется в числе F_i с тем отличием, что первая 1 будет занесена в ($k-1$)-й разряд.

7 Счёт будет продолжаться по аналогии с приведенными выше пунктами до тех пор, пока все разряды числа F_{n-k} не установятся в 1.

Конец.

Из приведенного алгоритма счёта в ЛЦБСС вытекает следующее ограничение: а) максимальное число единиц, содержащихся в числах F_i, равно k и они располагаются, начиная со старшего разряда, друг за другом без промежуточных нулей; б) общее число единиц в числе $F \le k$; в) во всех числах F, за исключением нулевого, в k -м разряде одного из частных чисел F_i должна присутствовать 1; г) число нулей, стоящее перед старшей единицей или между двумя единицами, должно быть кратно k.

Нарушение хотя бы одного из этих ограничений свидетельствует об ошибке в числе ЛЦБСС. Это значит, что числа ЛЦБСС помехоустойчивы.

Обратим внимание также на то, что каждое следующее число после нуля, получаемое в процессе счёта, на 1 больше предыдущего, и общее количество перебираемых чисел равно $P = C_{n+1}^{k}$.

Отсюда следует вывод, что линейно-циклические биномиальные числа из диапазона $P = C_{n+1}^{k}$ однозначным образом кодируют натуральные числа, начиная с 0 и до $P-1$.

11 Матричный биномиальный счет

При использовании БМ выгодно сочетается большое быстродействие построенных на её основе цифровых устройств за счет отсутствия переносов и распараллеливания операций и одновременно их высокая надежность.

Однако рассматриваемые матрицы не в состоянии сами по себе решить задачу построения какого-либо универсального цифрового устройства, так как для их реализации необходимо использовать отсутствующую пока что теорию универсального биномиального матричного счета. Поэтому необходимы дальнейшие углубленные его исследования.

Определение 10 Биномиальной числовой двоичной (n, k)-матрицей (биномиальной матрицей) называется (0, 1)-матрица

$$\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1j} & \dots & \alpha_{1k} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2j} & \dots & \alpha_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{i1} & \alpha_{i2} & \dots & \alpha_{ij} & \dots & \alpha_{ik} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{(n-k)1} & \alpha_{(n-k)2} & & \alpha_{(n-k)j} & & \alpha_{(n-k)k} \end{bmatrix},$$

содержащая $n-k$ строк длины k, где $\alpha_{ij} \in \{0,1\}$, которая удовлетворяет следующим свойствам:

1 Число элементов биномиальной матрицы

$$N = (n-k)k\ . \quad (53)$$

2 В столбце матрицы может находиться не более одной 1, т.е.

$$\alpha_{ij}\alpha_{zj} = 0\,, \quad (54)$$

где $z = 1, 2, \dots, n-k; i \neq z$.

3 Число единиц q_M в матрице не превышает значение k, а число нулей $l_M - N$:

$$0 \le q_M \le k\,, \quad (55)$$

$$N - q_M = l_M \le N\,. \quad (56)$$

4 Единицы в матрице, в количестве от 1 до k, расположены в одной или нескольких строках так, что первая из них находится в крайнем левом, а последняя - в любом последующем столбце. При этом между столбцами с единицами отсутствуют столбы, в которых находятся только нули. Это значит, что если дана начальная 1 в виде элемента α_{i1}, промежуточная в форме $\alpha_{i'2}$ и конечная $\alpha_{\gamma j}$, то

$$\alpha_{i1}\alpha_{i'2}\dots\alpha_{\gamma j} = 1\,, \quad (57)$$

$i, \gamma, i' = 1, 2, \dots, n-k\,; i \neq i' \neq \gamma$.

5 Логическое суммирование элементов диагоналей биномиальной матрицы, идущих сверху вправо, образует цифры биномиального числа:

$$\begin{aligned}
&\alpha_{(n-k)1} = x_{r-1},\\
&\alpha_{(n-k-1)1} + \alpha_{(n-k)2} = x_{r-2},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\alpha_{1(k-1)} + \alpha_{2k} = x_1,\\
&\alpha_{1k} = x_0.
\end{aligned}$$

6 Сдвиг каждой строки биномиальной матрицы, за исключением первой, по отношению к предшествующей строке на один разряд влево образует каскадный (ступенчатый) код, в котором цифры биномиального числа образуются логическим суммированием по столбцам:

$$\begin{array}{cccccc}
 & & \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1k}\\
 & \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2k} & \\
 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \\
\alpha_{(n-k)1} & \alpha_{(n-k)2} & \ldots & \alpha_{(n-k)k} & & \\
\hline
x_{r-1} & x_{r-2} & \ldots & & x_1 & x_0
\end{array}.$$

7 Если в ($n-k$)-й строке расположена последовательность единиц, то она всегда расположена в ее начальной части, начиная с элемента $\alpha_{(n-k)1}$ и до $\alpha_{(n-k)j'}$, то есть произведение

$$\alpha_{(n-k)1}\alpha_{(n-k)2}\ldots\alpha_{(n-k)j'} = 1, \qquad (58)$$

$j' = 1, 2, \ldots, k$.

8 Во всех строках матрицы, за исключением ($n-k$)-й, в любой ее части может быть образована последовательность единиц длиной от 1 до k, в которой не могут присутствовать промежуточные нули.

Это значит, что если даны начальная единица в строке i $\beta_{ij'}$ и конечная $\beta_{ij''}$; $j', j'' = 1, 2, \ldots, k$, $j' \geq j''$, то логическое произведение

$$\beta_{ij'}\beta_{i(j'+1)}\ldots\beta_{ij''} = 1.$$

9 Среди элементов любой диагонали матрицы, направленной сверху направо, только один элемент может быть равен 1.
Это значит, что произведение

$$\alpha_{ij}\alpha_{(i+p)(j+p)}=0 \tag{59}$$

для всех значений $i=1,\ 2,\ ...,\ n-k$ и $j=1,\ 2,\ ...,\ k$, где $p=1,\ 2,\ ...,\ k-j$ при условии, что

$$k-j\le n-k-i\,, \tag{60}$$

или $p=1,\ 2,\ ...,\ n-k-i$ при

$$k-j\ge n-k-i\,. \tag{61}$$

10 Количества единиц q_m в биномиальной матрице и q в биномиальном числе равны между собой:

$$q_m=q\,. \tag{62}$$

11 В первом столбце БМ, за исключением БМ нулевого числа, обязательно содержится 1.

12 Единицы в матрице располагаются так, что единица каждого последующего столбца находится или в той же строке, что и в предшествующем столбце, или в одной из верхних строк с меньшим номером.

13 Если в первом столбце 1 отсутствует, то и в остальных столбцах не будет единиц.

14 Нижние элементы первого столбца БМ, содержащей хотя бы одну 1, начиная с ($n-k$)-го элемента и до элемента, образующего 1, представляют собой старшие разряды соответствующего линейного биномиального числа.

Элементы второго столбца БМ, начинающиеся с элемента, соответствующего 1 первого столбца и направленные к вершине этого столбца до элемента, равного 1 включительно или при его отсутствии до 0 в начале столбца включительно, образуют следующие за полученными в первом столбце старшими разрядами младшие по отношению к ним разряды линейного биномиального числа.

Аналогично находятся элементы, образующие младшие разряды биномиального числа в третьем столбце и т.д. до k-го столбца включительно.

15 Количество нулей до первой 1 при их счете от начала нижней строки $i=n-k$ по строкам кратно k.

16 Между смежными единицами, стоящими в разных строках БМ, число нулей при их счете по строкам кратно k.

Приведем все биномиальные матрицы для $n = 6, k = 3$, число которых определяется диапазоном биномиальных чисел $P = C_6^3 = \dfrac{6!}{3!3!} = 20$:

0	1	2
$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&1&0 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$
0 0 0 0 0	0 0 1 0 0	0 0 1 1 0
3	4	5
$\begin{bmatrix} 1&1&1 \\ 0&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$
0 0 1 1 1	0 1 0 0 0	0 1 0 1 0
6	7	8
$\begin{bmatrix} 0&1&1 \\ 1&0&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 1&1&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 1&1&0 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$
0 1 0 1 1	0 1 1 0 0	0 1 1 0 1
9	10	11
$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 1&1&1 \\ 0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&1&0 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$
0 1 1 1 0	1 0 0 0 0	1 0 0 1 0
12	13	14
$\begin{bmatrix} 0&1&1 \\ 0&0&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&1&0 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$
1 0 0 1 1	1 0 1 0 0	1 0 1 0 1
15	16	17
$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&1&1 \\ 1&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&0 \\ 0&0&0 \\ 1&1&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&0&1 \\ 0&0&0 \\ 1&1&0 \end{bmatrix}$
1 0 1 1 0	1 1 0 0 0	1 1 0 0 1

$$\begin{array}{cc} 18 & 19 \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\ 1\,1\,0\,1\,0 & 1\,1\,1\,0\,0. \end{array}$$

Вверху над этими матрицами проставлены их десятичные эквиваленты (номера), а внизу даны их представления в виде линейных биномиальных чисел.

Число элементов в этих матрицах равно 9. Единицами могут быть заполнены не больше $k=3$.

Они расположены так, что первая из них находится в крайнем левом столбце матрицы, а все остальные следуют за ней без промежуточных нулей.

В каждом столбце и идущей сверху направо диагонали матрицы находится не более одной 1.

Число единиц в любой строке матрицы не превышает $k=3$, и расположены они так, что между ними отсутствуют нули.

Анализ биномиальных матриц показывает, что счет в их строках происходит в унитарном коде, что приводит к отсутствию в процессе счета единиц переноса из разряда в разряд.

Таким образом, биномиальные матрицы позволяют значительно поднять быстродействие и надежность счетных устройств. В перспективе можно говорить о создании надежной быстродействующей матричной биномиальной арифметики и соответственно о быстродействующей и надежной матричной цифровой технике.

12 Каскадный биномиальный счет

Кроме рассмотренных выше линейных и матричных форм представления биномиальных чисел, существуют и другие формы их представления, в частности, использующие каскадное (ступенчатое) представление биномиальных чисел.

Определение 11 Каскадным двоичным (n,k) биномиальным кодом называется код, в котором каждая биномиальная комбинация с параметрами n и k преобразуется в $n-k$ каскадов длины k, каждый из которых, за исключением первого, состоящего из k младших разрядов, сдвинут по отношению к предшествующему на один разряд влево.

Таким образом, после объединения по ИЛИ входящих в каскады двоичных элементов, стоящих в одном разряде, будет получена исходная биномиальная комбинация.

Исходный первый каскад получается выделением с кодирующего ноль биномиального числа $\overbrace{\underbrace{00...0}_{n-k-1}\ \underbrace{00...0}_{k}}^{n-1}$ младших k разрядов. Ниже под этим каскадом располагается следующий каскад с тем же числом k разрядов таким образом, чтобы его старший $(k-1)$-й разряд был сдвинут по отношению к старшему $(k-1)$-му разряду первого каскада на один разряд влево, а за ним и остальные разряды: $\begin{array}{r}00...00\\ 00...00\end{array}$. Под этим каскадом строится таким же образом следующий каскад и так далее, пока общее число каскадов не станет равным $n-k$:

$$\left.\begin{array}{r}\overbrace{00...00}^{k}\\ 00...00\\ .....\\ \underbrace{00...00}_{k}\end{array}\right\} n-k\ .$$

Так как первый каскад имеет k открытых (не находящихся под другими) разрядов, а остальные $n-k$ каскадов содержат по одному такому разряду, то общее число открытых разрядов в каскадной форме будет равно длине исходного биномиального числа $r = n-k-1+k = n-1$.

Заполняя по определенным правилам разряды всех ступеней нулями и единицами, и объединяя, находящиеся друг над другом по вертикальной линии разряды операцией ИЛИ, можно последовательно получить все равномерные биномиальные числа из диапазона $P = C_n^k$.

Рассмотрим эти правила. Очевидно, что исходное каскадное биномиальное кодирующее ноль число содержит во всех разрядах своих каскадов нули.

Для следующего по порядку большего на 1 равномерного биномиального числа необходимо в $(k-1)$–й разряд биномиального числа, кодирующего 0, записать 1:

$$\overbrace{\underbrace{00...0}_{n-k-1}\ \underbrace{10...0}_{k}}^{n-1}.$$

Так как $(k-1)$–й разряд биномиального числа соответствует старшему разряду первого каскада, то соответственно при изображении этого числа в каскадной форме 1 заносится в старший $(k-1)$–й разряд этой ступени:

$$\begin{array}{c} 10...00 \\ 00...00 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

В данном случае $(k-1)$-й разряд соответствует $(n-k)$-му разряду биномиального числа при счете разрядов слева направо, в которых содержатся нули. И далее, на каждом шаге кодирования 1 заносится вместо $(n-k)$-го 0 при счете слева. Поэтому если 1 уже находится в $(k-1)$-м разряде числа, то при построении следующего биномиального числа, содержащего меньше k единиц, следующая 1 должна заноситься в соседний $(k-2)$-й разряд, соответствующий $(n-k)$-му нулю. Затем в $(k-3)$-й и т.д. до нуля, пока не будет получено k единиц в числе.

Поэтому следующим после полученного выше биномиального числа, кодирующего 1, будет число $\overbrace{\underbrace{00...0}_{n-k-1}\ \underbrace{11...0}_{k}}^{n-1}$ и соответственно его каскадная форма примет вид

$$\begin{array}{c} 11...00 \\ 00...00 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

В конечном итоге будет получено биномиальное число

$$\overbrace{\underbrace{00...0}_{n-k-1}\ \underbrace{11...1}_{k}}^{n-1}$$

с каскадной формой

$$\begin{array}{c} 11...11 \\ 00...00 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

После этого все k единиц биномиального числа должны преобразоваться в нули, а в последний нуль, стоящий перед единицами, должна быть записана 1:

$$\underbrace{\overbrace{00...1}^{}_{n-k-1}\ \underbrace{00...0}_{k}}^{n-1}.$$

В каскадной форме это число соответственно будет иметь следующий вид:

$$\begin{array}{r} 00...00 \\ 10...00 \\ ..... \\ 00...00, \end{array}$$

т.е. в старшем разряде второй ступени появится 1, а все разряды первой ступени установятся в 0.

Затем должно произойти занесение 1 вместо ($n-k$)-го нуля при счете со стороны старших разрядов. Однако так как в биномиальном числе уже находится одна 1, то ($n-k$)-й 0 должен находиться в ($k-2$)–м разряде, и поэтому занесение произойдет в этот ($k-2$)–й разряд:

$$\overbrace{\underbrace{00...1}_{n-k-1}\ \underbrace{01...0}_{k}}^{n-1}.$$

Соответствующая каскадная форма будет в этом случае иметь следующий вид:

$$\begin{array}{r} 01...00 \\ 10...00 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

Дальше происходит последовательное заполнение единицами первого каскада до нулевого разряда включительно:

$$\begin{array}{r} 01...11 \\ 10...00 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

После этого происходит обнуление всех единиц первого каскада и рядом с 1 в старшем разряде второго каскада справа записывается следующая 1:

$$\begin{array}{r} 00...00 \\ 11...00 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

Наличие двух единиц во втором каскаде и соответственно в биномиальном числе приводит к тому, что $(n-k)$-й 0 находится теперь в $(k-3)$–м разряде первого каскада:

$$\begin{array}{r} 0010...00 \\ 1100...00 \\ ..... \\ 0000...00. \end{array}$$

Затем снова последовательно происходит заполнение единицами первого каскада до нулевого разряда включительно:

$$\begin{array}{r} 001...11 \\ 110...00 \\ ..... \\ 00...00, \end{array}$$

а затем их обнуление и перенос 1 в $(k-3)$-й разряд второго каскада:

$$\begin{array}{r} 000...00 \\ 111...00 \\ ..... \\ 000...00. \end{array}$$

Данная процедура обнуления единиц в первом каскаде и их записи во второй будет идти до тех пор, пока во второй ступени во всех разрядах не появятся единицы:

$$\begin{array}{r} 00...00 \\ 11...11 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

После этого произойдет обнуление единиц второго каскада и появление 1 в старшем $(k-1)$–м разряде третьего каскада:

$$\begin{array}{r} 00...00 \\ 00...00 \\ 10...00 \\ ..... \\ 00...00. \end{array}$$

Наличие 1 в $(k-1)$–м разряде третьей ступени приведет к запрету появления единиц в одноименных разрядах первой и второй ступеней, т.е. следующее биномиальное число и соответствующая ему каскадная форма будет иметь вид:

$$\overbrace{\underbrace{00...10}_{n-k-1}\ \underbrace{010...0}_{k}}^{n-1},$$

$$\begin{array}{r} 010...00 \\ 000...00 \\ 100...00 \\ .\ .\ .\ .\ . \\ 000...00. \end{array}$$

Это же правило распространяется и на четвертый каскад, и далее на все остальные вплоть до последнего ($n-k$)-го.

Из этого следует общее правило построения каскадных биномиальных чисел на основе предшествующих: наличие 1 в i-м разряде, $i = 0,1,...,k-1$, старшего каскада запрещает появление единиц в одноименных разрядах младших каскадов, находящихся над ним.

Это значит также, что если во всех разрядах младшего каскада появились единицы, то все разряды следующих старших каскадов должны находиться в нуле, а если старший каскад содержит во всех разрядах единицы, то во всех разрядах стоящих над ним (младших) каскадов должны стоять нули:

$$\begin{array}{r} 00...00 \\ 00...00 \\ .\ .\ .\ .\ . \\ 11...11. \end{array}$$

Проиллюстрируем это правило на двух примерах $n = 6$, $k = 4$ и $n = 6$, $k = 2$, представленных соответственно в табл.23 и 24.

Таблица 23 – Биномиальные числа
с $n = 6$, $k = 4$ в каскадной форме при суммирующем счете

Номер бин. числа	Разряды					Каскадная форма	Номер бин. числа	Разряды					Каскадная форма
	4	3	2	1	0			4	3	2	1	0	
0	0	0	0	0	0	0000 0000	8	1	0	1	1	1	0111 1000
1	0	1	0	0	0	1000 0000	9	1	1	0	0	0	0000 1100
2	0	1	1	0	0	1100 0000	10	1	1	0	1	0	0010 1100
3	0	1	1	1	0	1110 0000	11	1	1	0	1	1	0011 1100
4	0	1	1	1	1	1111 0000	12	1	1	1	0	0	0000 1110
5	1	0	0	0	0	0000 1000	13	1	1	1	0	1	0001 1110
6	1	0	1	0	0	0100 1000	14	1	1	1	1	0	0000 1111
7	1	0	1	1	0	0110 1000							

Таблица 24 – Биномиальные числа с $n = 6$, $k = 2$ в каскадной форме при суммирующем счете

Номер бин. числа	Разряды					Каскадная форма	Номер бин. числа	Разряды					Каскадная форма
	4	3	2	1	0			4	3	2	1	0	
0	0	0	0	0	0	00 00 00 00	8	0	1	0	1	0	00 01 10 00
1	0	0	0	1	0	10 00 00 00	9	0	1	1	0	0	00 00 11 00
2	0	0	0	1	1	11 00 00 00	10	1	0	0	0	0	00 00 00 10
3	0	0	1	0	0	00 10 00 00	11	1	0	0	0	1	01 00 00 10
4	0	0	1	0	1	01 10 00 00	12	1	0	0	1	0	00 01 00 10
5	0	0	1	1	0	00 11 00 00	13	1	0	1	0	0	00 00 01 10
6	0	1	0	0	0	00 00 10 00	14	1	1	0	0	0	00 00 00 11
7	0	1	0	0	1	01 00 10 00							

Сформулируем алгоритм полного каскадного биномиального равномерного счета в табличной форме (см. табл. 25).

Таблица 25 - Алгоритм суммирующего полного каскадного биномиального счета

Номер шага	Содержание
1	Формируется первое каскадное биномиальное число, кодирующее 0, содержащее $n-k$ каскадов из k разрядов, в каждом из которых записан 0
2	Происходит занесение 1 в $(k-1)$-й разряд первого каскада и далее в него последовательно заносятся единицы во все младшие разряды до нулевого включительно
3	Происходит занесение 1 в $(k-1)$-й разряд второго каскада и обнуление всех разрядов первого каскада
4	Происходит занесение 1 в $(k-2)$-й разряд первого каскада и затем последовательное занесение единиц во все младшие разряды первого каскада до нулевого включительно
5	Обнуляются все разряды первого каскада и происходит занесение 1 в $(k-2)$-й разряд второго каскада
6	Происходит занесение 1 в $(k-3)$-й разряд первого каскада, и цикл заполнения его единицами и переноса единиц во второй каскад повторяется до обнуления всех разрядов первого и второго каскадов с занесением 1 в $(k-1)$-й разряд третьего каскада
7	Аналогично происходят запись единиц и их обнуление до $(n-k)$-го каскада
8	В случае если в $(n-k)$-м каскаде в старших k разрядах, начиная с $(k-1)$-го, находятся единицы, то получено максимальное число $F_{\max} = P-1$
9	Останов

Алгоритм каскадного вычитающего счета состоит в последовательном поиске в одноименных разрядах всех каскадов, начиная с младшего разряда, первого единичного разряда, сброса его в нулевое состояние и одновременной установки в единичное состояние младших разрядов предыдущего каскада (см. табл. 26).

Таблица 26 – Биномиальные числа с $n=6$, $k=4$ в каскадной форме при вычитающем счете

Номер бин. числа	Разряды					Каскадная форма	Номер бин. числа	Разряды					Каскадная форма
	4	3	2	1	0			4	3	2	1	0	
0	1	1	1	1	0	0000 1111	8	1	0	1	0	0	0100 1000
1	1	1	1	0	1	0001 1110	9	1	0	0	0	0	0000 1000
2	1	1	1	0	0	0000 1110	10	0	1	1	1	1	1111 0000
3	1	1	0	1	1	0011 1100	11	0	1	1	1	0	1110 0000
4	1	1	0	1	0	0010 1100	12	0	1	1	0	0	1100 0000
5	1	1	0	0	0	0000 1100	13	0	1	0	0	0	1000 0000
6	1	0	1	1	1	0111 1000	14	0	0	0	0	0	0000 0000
7	1	0	1	1	0	0110 1000							

СПИСОК ЛИТЕРАТУРИ

1. Борисенко А.А. Методы синтеза информационных систем на основе позиционных чисел с неоднородной структурой. Диссертация на соискание ученой степени доктора технических наук, 1991.

2. Стахов А. П. Введение в алгоритмическую теорию измерения. – М.: "Сов. радио", 1977. - 288с.

3. Борисенко А. А. Основы теории двоичного биномиального счета // Вестник СумГУ, 1999. -№1(12), с. 71-75.

4. Борисенко А. А. Основы теории двоичного биномиального счета (продолжение) // Вестник СумГУ, 2002. -№45, с. 46 - 56.

5. Кнут Д. Искусство программирования, том 1. Основные алгоритмы, 3-е изд.: Пер.с англ.: Уч. пос. - М.: Изд. Дом “Вильямс”, 2000. - 720 с.

6. Халайзмер А.Я. Комбинаторика и бином Ньютона. Пособие для учащихся 9-10 кл. – М.: Просвещение, 1980.-32 с.

7. Риордан Дж. Комбинаторные тождества / Пер. с англ. – М.: "Наука", 1982. – 253 с.

8. Кемени Дж., Спел Дж., Томпсон Дж. Введение в конечную математику / Пер. с англ. – М.: "Мир", 1965. – 486 с.

9. Федерман С. Числовые системы. Основание алгебры и анализа / Пер. с англ. – М.: "Наука", 1971. – 440 с.

10. Борисенко А. А. Принцип унитарности и его приложение к теории информации // Вестник СумГУ, 2001. -№24-25, с. 154 - 160.

11. Борисенко А. А. Системы счисления с биномиальным основанием и двоичным алфавитом. Деп. рук. №909-82 ВИНИТИ, 1982. – 6 с.

12. Борисенко А. А. Представление биномиальных чисел в матричной форме // Вестник СумГУ, 2003. -№11(57), с. 51 - 56.

АНОТАЦІЯ

В роботі проведені оригінальні дослідження автором в сфері біноміальних систем числення і біноміальної лічби, які мають теоретичне і практичне значення при розробці різних алгоритмів кодування і надійних інформаційних пристроїв.

В основу досліджень покладені ряди біноміальних коефіцієнтів і основаних на них біноміальних прямокутників і паралелограмів, які мають також і чисто математичне значення.

THE SUMMARY

The paper, proposed by author describes original results of your research work in the field of binomial number systems and binomial counting, which have some interesting and useful properties. The given results can be of practical benefit when developing different coding algorithms and reliable information devices.

The basis of research work are series of binomial rectangles and parallelograms which are interesting in purely mathematical aspect as well.

Наукове видання

Борисенко Олексій Андрійович

Вступ в теорію біноміальної лічби

Монографія

Редактор видавництва В. І. Кочубей
Технічний редактор С.М.Симоненко
Компьютерний набір: І.Є.Бражник
Художнє оформлення І.Є.Бражник

Підписано до друку 28.04.2004.
Формат 60x84 $1/16$. Папір офсетний.
Гарнітура Times. Друк офсетний.
Ум. друк. арк..4.2. Обл..-вид. арк. 4.2.
Тираж 300 прим. Замовлення №248.

Видавничо-торговий дім "Університетська книга"
40030, Україна, м. Суми, вул. Кірова, 27
Тел./факс: (0542) 21-13-57; Тел. 27-51-43
E-mail: pablis@book.sumy.ua

Свідоцтво про внесення суб’єкта видавничої справи
до державного реєстру видавців і розповсюджувачів
видавничої продукції ДК № 489 від 18.06.2001.

Віддруковано відповідно до якості
наданих діапозитивів на ПП "Мусатов"
Україна, 40030, м. Суми, вул. Ковпака, 17, к.35

БОРИСЕНКО Алексей Андреевич

Специалист в области электронных вычислительных машин и информатики. Доктор технических наук (1991), профессор (1995).

Окончил Харьковский институт радиоэлектроники (1970). С тех пор работал в нём инженером, научным сотрудником, ассистентом, тогда же закончил аспирантуру (1976) и защитил диссертацию на степень кандидата технических наук (1979).

С 1980 – в Сумском государственном университете: старший преподаватель, доцент, профессор, с 1992 – заведующий кафедрой электроники и компьютерной техники.

Научные исследования проводил в области электроники и вычислительной техники. Имеет более 100 работ в таких отраслях техники, как электронные системы отображения информации, управляющие системы, системы передачи данных, системы контроля на основе технического зрения и распознавания образов, среди которых около 40 изобретений.

Основное научное направление при этом – повышение надёжности и быстродействия электронных систем и устройств на базе специальных систем кодирования, прежде всего созданной им теории неоднородных систем счисления, среди которых подробно исследованы биномиальные системы.

Вместе с тем были проведены исследования в области теории информации. При этом исследовал особый класс бернулиевских источников информации, на основе которых разработал новые методы сжатия информации.

За эти и другие исследования в области дискретной математики был удостоен гранта фонда “Відродження" для учёных и преподавателей среди математиков за 1998 год, основанного Правительством Украины и Институтом открытого общества США.

BORYSENKO Oleksiy Andriyovich

Engineer-electric, specialist in the area of electronic calculation machines and computer sciences. Doctor of technical sciences (1991), professor (1995). Graduated from Kharkov's Institute of Radioelctronics (1970). Since that worked in it as engineer, science researcher, lecture, did postgraduate course (1976) and protected the dissertation on a degree of candidate of technical science (1978). Since 1980 Sumy State University : senior lecture, reader, professor, since 1992 the head of Industrial Electronics and Automatic Department.

Science researches were done in the area of electronics and calculation technique. Author has more than 30 researches and works, in the areas of computer sciences such as electronic systems of mapping of dates , the systems of management based on the technique sight and image recognition.

The main science idea – to make more reliable electronic systems and automatons based on the pecial systems of coding, first of all created the theory of nonordinary number systems, among of that binomial systems are fully researched.

Parally were done researches in the area of information theory. At that found special class of Bernulli sources of information, on the base of which elaborated new methods of information compression.

For these and another researches in the area of discrete mathematics Author was rewarded "Vidrodjennya" foundation for science researches and lectures among mathematics in 1998 year, founded by Ukrainian Government and Institute of open society of USA.